



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ



БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ  
ФОНД В. ПОТАНИНА



# **Дисциплина «Вероятностные модели»**

## **Тема «Решение оптимизационных задач для СМО»**

Разработчик:

А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент

*Уровень обслуживания* в системе является функцией интенсивности обслуживания  $\mu$  и количества  $s$  параллельно работающих сервисов. Можно рассмотреть две модели принятия решений для определения "подходящих" уровней обслуживания для систем массового обслуживания:

- 1) модель со стоимостными характеристиками;
- 2) модель предпочтительного уровня обслуживания.

В обеих моделях более высокий уровень обслуживания подразумевает уменьшение времени ожидания в системе. В этих моделях для поиска равновесия между конфликтующими факторами (уровнем обслуживания и временем ожидания в системе) используются функциональные показатели обслуживающей системы, которые получены ранее для различных моделей.

Модели со стоимостными характеристиками стремятся уравновесить два **конфликтующих стоимостных показателя**.

1. Затраты на обслуживание.
2. Потери, обусловленные задержками в предоставлении услуг (время ожидания клиента).

Эти два вида затрат конфликтуют между собой, так как увеличение одного из них автоматически ведет к уменьшению другого и наоборот. Следующие два примера иллюстрируют использование стоимостной модели.

**Задача 1.** Издательская фирма покупает высокоскоростной копировальный аппарат для коммерческих целей. Продавцы предложили четыре модели копировальных аппаратов, характеристики которых приведены в следующей таблице.

Модель копировального аппарата:	Эксплуатационные затраты (долл./ч)	Скорость печати (стр./мин.)
1	15	30
2	20	36
3	24	50
4	27	66

Заказы поступают на фирму в соответствии с пуассоновским распределением с математическим ожиданием четыре работы на протяжении 24-часового дня. Объем работы является случайной величиной, но в среднем составляет примерно 10 000 страниц. Договоры с клиентами предусматривают штраф в сумме 80 долл. (за одну работу) за задержку выполнения заказа на один день. Какой копировальный аппарат следует купить фирме?

### *Решение*

Для каждого аппарата нужно посчитать общие расходы  $C$  за день, которые состоят из двух видов затрат:

- 1) затраты на эксплуатацию аппарата  $C_c$ ;
- 2) затраты, связанные незавершенными заказами  $C_{L_s}$ .

Первый вид затрат  $C_c$  равен норме эксплуатационных расходов  $C_{hc}$  за час, умноженной на 24 (в сутках 24 часа). Второй вид затрат  $C_{L_s}$  напрямую зависит от  $L_s$ , штраф равен 80 долл. за работу, т.е.  $C_{L_s} = L_s * 80$ . Тогда для любого аппарата общие затраты равны

$$C = 24 * C_{hc} + 80 * L_s .$$

За день поступает в среднем 4 заказа, поэтому  $\lambda = 4$  заказа в день. Чтобы найти интенсивность работы аппарата  $\mu$ , нужно его производительность за сутки разделить на 10000 (средний объем работы). Модель имеет вид  $(M / M / 1) : (GD / \infty / \infty)$ . Для неё  $L_s = \rho / (1 - \rho)$ .

Модель	Интенсивность обслуживания $\mu$ (работы/день)	$L_s$ , работ
1	$30 * 60 * 24 / 10000 = 4,32$	12,50
2	$36 * 60 * 24 / 10000 = 5,18$	3,39
3	7,20	1,25
4	9,50	0,73

Тогда можно рассчитать общие затраты для каждого аппарата.

Наиболее выгодной оказывается 3 модель, как показано в таблице.

Модель	Затраты на обслуживание	Затраты на ожидание	Общие затраты
1	360,00	1000,00	1360,00
2	480,00	271,20	751,20
<b>3</b>	<b>576,00</b>	<b>100,00</b>	<b>676,00</b>
4	648,00	58,40	706,40



**Задача 2.** На инструментальный склад, где работают несколько служащих, поступают заявки на замену режущего инструмента в соответствии с распределением Пуассона со средним значением 17,5 заявки в час. Каждый служащий может выполнить в среднем 10 заявок в час. Стоимость найма нового служащего на склад составляет 12 долл. в час. Потери, связанные с ожиданием станка, оцениваются примерно в 50 долл. в час. Необходимо определить оптимальное число работников для рассматриваемой системы обслуживания.

### *Решение*

Описанная ситуация соответствует модели  $(M / M / c) : (GD / \infty / \infty)$ , в которой требуется определить оптимальное значение  $c$ . Следовательно, соответствующая стоимостная модель имеет вид

$$C(s) = 12 * c + 50 * L_s(c)$$

Заметим, что  $L_s(c)$  является функцией количества служащих на склад и определяется по формуле для модели  $(M / M / c) : (GD / \infty / \infty)$ .

Интенсивность входного потока  $\lambda$  равна 17,5; интенсивность обслуживания одним работником равна 10 заявок в час. Тогда можно менять значение  $c$ , и выбрать из них такое, при котором общие затраты минимальны. Заметим, что  $c$  должно быть больше, чем  $\rho = 17,5/10 = 1,75$ . Поэтому в качестве начального значения возьмем  $c = 2$ . Получим следующие результаты, который представим в виде таблицы.

$c$	$L_S(c)$ (заявки)	$C(c)$ (долл.)
2	7,467	397,35
3	2,217	142,35
<b>4</b>	<b>1,842</b>	<b>140,10</b>
5	1,769	148,45
6	1,754	159,70

Значит, оптимальное количество служащих на складе равно 4.

Жизнеспособность модели обслуживающей системы со стоимостными характеристиками зависит от того, насколько хорошо мы можем оценить параметры стоимости. В общем случае оценить эти параметры довольно сложно, особенно если стоимость связана с ожиданием клиента. В **моделях с предпочтительным уровнем обслуживания** делается попытка обойти эту проблему, оперируя непосредственно функциональными показателями обслуживающей системы.

Идея состоит в определении приемлемого интервала изменения для уровня обслуживания (параметры  $\mu$  или  $c$ ) путем поиска разумных пределов для *конкурирующих* экономических показателей, которые характеризуют процесс обслуживания. Эти пределы представляют собой *уровни предпочтительного обслуживания*, которых стремится достичь лицо, принимающее управленческое решение.

**Задача 3.** Цех использует 10 одинаковых станков. Каждый станок выходит из строя в среднем один раз в 7 часов. Ремонт сломанного станка длится в среднем 4 часа. Как процесс выхода станков из строя, так и процесс ремонта подчиняются распределению Пуассона. Определите следующие показатели.

1) Необходимое число механиков для ремонта станков, при котором среднее количество неработающих станков будет меньше 4.

2) Такое число механиков для ремонта станков, чтобы ожидаемое время задержки, обусловленное ремонтом станка, было меньше четырех часов.

Ответ:        1) 5 механиков;  
                     2) 6 механиков.