НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВМИ

БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА

Дисциплина «Вероятностные модели»

Тема «Модель с параллельными сервисами**»**

Разработчики:

А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент

Ю.Ф. Игошева, студент группы ВМИ-532

Выделяют три вида моделей с параллельными сервисами:

1) $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$
2) $(M/M/c):(GD/N/\infty)$
3) $(M/M/\infty):(GD/N/\infty)$

Модель $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$

Интенсивность входного потока равна λ, а интенсивность обслуживания клиентов - μ для каждого сервиса. Т.к. ограничение на длину очереди отсутствует $\lambda_{эфф} = \lambda$. Всего параллельных сервисов - c.

Всего параллельных сервисов – c. Если число клиентов не больше c ($n \leq c$), то интенсивность обслуживания увеличивается пропорционально (т.е. $\mu_n = n\mu$), в остальных случаях $c\mu$. Тогда

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq c, \\ c\mu, & n > c. \end{cases}$$

Отсюда (из обобщенной модели СМО),

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} p_0 = \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0\,, & n \le c, \\ \dfrac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\ldots(c-1)\mu(c\mu)^{n-c+1}} p_0 = \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\,\mu^n} p_0\,, & n > c. \end{cases}$$

Значение вероятности p_0 определяется из $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

- Финальные вероятности будем считать по обобщенной модели:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_0 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0 = \rho \cdot p_0$$

- Чтобы система обслуживания была стационарна, необходимо, чтобы $\frac{\rho}{c} < 1$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} \cdot p_1 = \frac{\rho^2}{2} \cdot p_0 \qquad p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p_2 = \frac{\lambda}{3 \cdot \mu} \cdot p_2 = \frac{\rho^3}{6} \cdot p_0 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot p_0$$

$$p_c = \frac{\rho^c}{c!} \cdot p_0$$

$$p_{c+1} = \frac{\lambda_c}{\mu_{c+1}} \cdot p_c = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_c = \frac{\rho}{c} \cdot p_c \qquad p_{c+2} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{c+1} = \frac{\rho^2}{c^2} \cdot p_c = \left(\frac{\rho}{c}\right)^2 \cdot p_c$$

Пусть $\rho = \lambda / \mu$ и $\rho / c < 1$, получаем след. формулу для p_0:

$$p_0 = 1 / \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c! c^{n-c} \mu^n} \right] = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c} \right)^{n-c} \right]^{-1} \Rightarrow$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \rho / c} \right) \right]^{-1}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot p_0, & 0 \le n < c \\ \left(\dfrac{\rho}{c} \right)^{n-c} \cdot \dfrac{\rho^c}{c!} \cdot p_0, & n \ge c \end{cases}$$

Тогда *среднее количество клиентов в очереди* равно:

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)p_n = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)\frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} p_0 = p_0\frac{\rho^c}{c!}\sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} =$$

$$= \{k = n-c\} = p_0\frac{\rho^c}{c!}\sum_{k=1}^{\infty}k(\rho/c)^k =$$

$$= p_0\frac{\rho^c}{c!}\left[\left((\rho/c)+(\rho/c)^2+\ldots\right)+\left((\rho/c)^2+(\rho/c)^3+\ldots\right)+\ldots\right] =$$

$$= p_0\frac{\rho^c}{c!}\left[\frac{\rho/c}{1-\rho/c}+\frac{(\rho/c)^2}{1-\rho/c}+\ldots\right] = p_0\frac{\rho^c}{c!}\left[\frac{\rho/c}{(1-\rho/c)^2}\right] =$$

$$= p_0\frac{\rho^c}{c!}\frac{\rho c}{(c-\rho)^2} = p_0\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}$$

Таким образом,

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1-\rho/c} \right) \right]^{-1}$$

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0 .$$

Т.к. $\lambda_{эфф} = \lambda$, то $L_s = L_q + \rho$; значения W_s и W_q можно найти путем деления по формулам Литтла.

Задача 1. В небольшом городке функционирует две службы такси. Каждая из них располагает двумя автомобилями, и по имеющейся информации заказы на обслуживание делятся службами практически поровну (заказы в диспетчерские поступают с одной и той же интенсивностью, равной 8 вызовам в час). Среднее время выполнения одной заявки составляет 12 минут. Заявки поступают в соответствии с распределением Пуассона, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону. Недавно обе службы стали одним предприятием с общей диспетчерской службой. Станет ли обслуживание лучше?

Решение

Необходимо рассмотреть две ситуации.

Первая. Имеется две различные фирмы. Каждая представляет собой СМО вида $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$ с $\lambda_n = 8$ заявок в час и $\mu = 60/12 = 5$ поездок на одном такси в час.

Вторая - общая диспетчерская. Тогда имеем СМО вида $(M/M/4):(GD/\infty/\infty)$ с $\lambda_n = 16$ заявок в час и $\mu = 60/12 = 5$ поездок на одном такси в час.

Клиентов обычно интересует время ожидания в очереди. Поэтому необходимо найти величину W_q для обеих ситуаций.

$$\rho = \lambda / \mu = \begin{cases} 8/5, & (M/M/2):(GD/\infty/\infty), \\ 16/5, & (M/M/4):(GD/\infty/\infty). \end{cases}$$

Для модели с несколькими сервисами без ограничения на длину очереди

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0, \quad p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1-\rho/c} \right) \right]^{-1}.$$

Таким образом, объединение диспетчерских служб снизило среднее время ожидания на 50%., поэтому с точки зрения повышения качества обслуживания объединение целесообразно. **Т.о. объединение систем обслуживания всегда обеспечивает более эффективный режим работы.** Вот почему укрупнение сервисов является частой практикой.

Модель $(M/M/c):(GD/N/\infty)$ *(c<=N)*

Эта модель отличается от предыдущей ограничением на длину очереди. Т.к. ограничение на длину очереди имеется $\lambda_{эфф} < \lambda$ ($\lambda_{эфф} = (1 - p_N)\lambda$).

Параметры модели λ_n и μ_n определяются так:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \le n \le N, \\ 0, & n > N. \end{cases},$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \le c, \\ c\mu, & c \le n \le N. \end{cases}$$

Аналогично предыдущей модели найдем p_0:

$$p_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1-(\rho/c)^{N-c+1}}{1-\rho/c} \right) \right]^{-1}, & \rho/c \neq 1, \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}(N-c+1) \right]^{-1}, & \rho/c = 1. \end{cases}$$

Таким образом, среднее число клиентов в очереди равно

$$L_q = \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0 \left[1-(\rho/c)^{N-c+1} - (N-c+1)(1-\rho/c)(\rho/c)^{N-c}\right], \quad \rho/c \neq 1$$

Также можно легко вывести, что

$$L_q = \frac{\rho^c}{2c!}(N-c)(N-c+1)p_0, \quad \rho/c = 1.$$

Модель самообслуживания *(M/M/∞):*(GD/∞/∞)

В этой модели количество сервисов является неограниченным, так как клиент выступает одновременно и в роли сервиса. Типичным примером модели самообслуживания является сдача письменной части экзамена на право вождения автомобиля. Газозаправочные станции автомобилей с самообслуживанием и банковские автоматы с 24-часовым режимом работы не вписываются в рассматриваемую здесь модель, так как обслуживающими устройствами в этих случаях являются, по существу, насосы и банковские автоматы соответственно.

В рассматриваемой модели предполагается, что интенсивность поступления клиентов λ является постоянной. Интенсивность обслуживания μ также является постоянной. Воспользовавшись формулами общей модели, имеем

$$\lambda_n = \lambda, \ \mu_n = n\mu \text{ для } n = 1,2,\ldots.$$

Применив такие же преобразования, что и ранее, получим

$$p_n = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ \ldots \quad .$$

Тогда $L_S = \rho$ и $L_q = W_q = 0$ (почему?).

Модель ремонта *(M/M/R)*:(*GD*/*K*/*K*) *R*<*K*

Базовым примером для этой модели является цех, насчитывающий *K* станков. Всякий раз, когда станки выходят из строя, прибегают к услугам одного из механиков, бригада которых состоит из *R* человек. Интенсивность поломок, отнесенная *к одному станку,* равняется λ поломок в единицу времени. Механик ремонтирует сломанные станки с интенсивностью μ станков в единицу времени. Предполагается, что моменты времени поломок и время ремонта подчиняются распределению Пуассона.

Эта модель отличается от всех рассмотренных ранее тем, что мощность источника, генерирующая "клиентов", конечна. Например, в модели цеха источник может породить конечное количество заявок на ремонт. Это положение становится очевидным, если предположить, что все станки в цехе сломаны, тогда больше не поступит ни одной заявки на ремонт. По существу, лишь работающие станки могут сломаться и, следовательно, генерировать заявки на ремонт.

При заданной интенсивности λ поломок на один станок интенсивность поломок во *всем цехе* пропорциональна количеству станков в рабочем состоянии. В терминологии систем обслуживания наличие n станков *в системе* означает, что n станков сломаны. Следовательно, интенсивность поломок во всем цехе вычисляется так:

$$\lambda_n = (K - n)\lambda, \quad 0 \le n \le K.$$

Тогда общая формула для интенсивностей

$$\lambda_n = \begin{cases} (K-n)\lambda, & 0 \le n < K, \\ 0, & n \ge K, \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n < R, \\ R\mu, & R \le n \le K, \\ 0, & n > K. \end{cases}$$

Отсюда получаем через формулы для вероятностей обобщенной модели

$$p_n = \begin{cases} C_K^n p_0, & 0 \le n \le R; \\ C_K^n \dfrac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}} p_0, & R \le n \le K. \end{cases}$$

Значение эффективной интенсивности поломок равно $\lambda_{эфф} = \lambda(K - L_S)$.

Задача 2. Пусть задана модель ремонта следующего вида. Оператор обслуживает пять автоматических станков. После того как каждый станок завершает выполнение пакета программ, оператор должен его перенастроить на выполнение нового пакета. Время выполнения пакета программ является экспоненциально распределенной случайной величиной со средним значением 45 мин. Время наладки также описывается экспоненциальным распределением с математическим ожиданием 8 мин.

1) Определите среднее количество станков, которые ожидают наладки.
2) Вычислите вероятность того, что все станки работают.
3) Определите среднее время простоя станка.

Ответ**:**

1) L_s=1,25 станка;
2) p_0=0,3341;
3) W_q=0,25 часа.