НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВМИ

БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА

Дисциплина «Вероятностные модели»

Тема «Модель с одним сервисом»

Разработчики:
А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент
О.В. Быкова, студент группы ВМИ-532
О.И. Бабина, студент группы ВМИ-213

В этом разделе представлены две модели обслуживающей системы с одним средством обслуживания (т.е. $c = 1$). Предполагается, что клиенты поступают с постоянной интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания также постоянна и равна μ клиентов в единицу времени. Первая модель не устанавливает ограничений на вместимость системы, во второй модели предполагается, что вместимость системы является ограниченной. В этих двух моделях источник, "порождающий" клиентов, имеет неограниченную емкость.

Модель $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$

Модель с одним сервисом
без ограничения на длину очереди,
дисциплина очереди общая

В этой модели

$$\lambda_n = \lambda\,,\ \mu_n = \mu \text{ для } n = 1,2,\ldots.$$

Ограничение на емкость системы отсутствует, поэтому $\lambda_{эфф}=\lambda$.

Обозначим

$$\lambda/\mu = \rho\,,$$

где ρ - плотность обслуживания

Найдем вероятности через формулы обобщенной модели:

$$p_1 = \lambda_0/\mu_1 \cdot p_0 = \lambda\ /\mu\ \cdot p_0 = \rho p_0\,;$$

$$p_2 = \lambda_1/\mu_2 \cdot p_1 = \lambda\ /\mu\ \cdot p_0 = \rho^2 p_0$$

$$p_2 = \rho^2 p_0\,;$$

$$\ldots$$

$$p_n = \rho^n p_0\,;$$

$$\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\ p_0 = 1$$

Получили сумму бесконечной геометрической прогрессии, но при этом ρ должен быть меньше 1, иначе не будет стационарного режима (система все время переполнена) и сумма геометрической прогрессии не сойдется. Тогда

$$p_0 \cdot 1/(1-\rho)=1.$$

Формулы финальных вероятностей:

$$p_0 = 1-\rho;$$

$$p_n = \rho^n(1-\rho).$$

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n (1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n =$$

$$= (1-\rho)((\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots) + (\rho^2 + \rho^3 + \ldots) + (\rho^3 + \rho^4 + \ldots) + \ldots =$$

$$= (1-\rho)(\rho/(1-\rho) + \rho^2/(1-\rho) + \ldots) = \rho + \rho^2 + \ldots = \rho/(1-\rho).$$

$$W_s = L_s/\lambda = \rho/(1-\rho)\cdot 1/\lambda = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$W_q = W_s - 1/\mu = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - 1/\mu = \frac{1-(1-\rho)}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L_q = W_q \cdot \lambda = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \cdot \lambda = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

$$\overline{C} = L_s - L_q = (\rho/(1-\rho)) - (\rho^2/(1-\rho)) = \rho$$

ρ - средняя занятость сервиса.

Модель с одним сервисом

Задача 1. Автоматическая мойка для автомобилей имеет только один моечный бокс. Автомобили прибывают в соответствии с распределением Пуассона со средним 4 машины в час и могут ожидать обслуживания на стоянке рядом с автомойкой. Время мойки автомобиля является экспоненциально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 10 мин. Автомобили, которые не помещаются на стоянке, могут ожидать на прилегающей к автомойке улице. Это значит, что практически нет ограничений на емкость системы обслуживания. Хозяин автомойки хочет определить количество мест на стоянке для автомобилей, при котором по меньшей мере 90 % прибывших автомобилей найдет место на стоянке.

Решение

Для рассматриваемой задачи имеем $\lambda = 4$ автомобиля в час и $\mu = 60/10 = 6$ автомобилей в час. Так как $\rho = \lambda / \mu = 2/3 < 1$, то система может функционировать в стационарном режиме. Отсюда $p_0 = 1 - \rho = 1/3$.

Пусть неизвестная переменная s представляет искомое количество мест на стоянке. Тогда система имеет емкость $s + 1$ (очередь плюс место на мойке). Прибывающий автомобиль в 90 % случаев получит место на стоянке, если в системе находится максимум s автомобилей. Это условие эквивалентно следующему вероятностному утверждению:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_s \geq 0{,}9 .$$

Финальные вероятности для модели с одним сервисом без ограничения на длину очереди рассчитываются по формуле

$$p_n = \rho^n (1-\rho).$$

Тогда $p_0 + p_1 + \ldots + p_s$ – это сумма ограниченной геометрической прогрессии с начальным значением $(1-\rho)$, множителем ρ и числом членов $s + 1$. Тогда

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_s = \frac{(1-\rho)(1-\rho^{s+1})}{1-\rho} = 1-\rho^{s+1}.$$

Отсюда $1-\rho^{s+1} \geq 0{,}9$. Тогда

$$s \geq [\ln(0{,}1)/\ln(2/3)] - 1,$$

$$s \geq 5,$$

округляем в большую сторону. Таким образом, необходимо s > 5 мест на стоянке. Если критерием является минимум затрат на обустройство мест, то имеет смысл оборудовать 5 мест.

Распределение времени для модели $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/1):(FCFS/\infty/\infty)$

Пусть задана модель с одним сервисом с дисциплиной очереди $FCFS$ (first come, first served):

$$(\mathrm{M}/\mathrm{M}/1):(FCFS/\infty/\infty)$$

Пусть в системе находится n клиентов. Требуется найти распределение времени обслуживания для клиента под номером n. Так как дисциплина очереди $FCFS$, клиент под номером n должен дождаться обслуживания всех предыдущих клиентов. Время обслуживания каждого клиента имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью μ.

Время обслуживания клиента с номером n:

$$t_{обсл}(n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

При этом клиент № 1 уже находится в сервисе.

Обозначим $w(t)$ – распределение времени нахождения клиента в системе.

Так как распределение обслуживания – это сумма экспоненциальных распределений, то оно будет иметь распределение Эрланга (γ-распределение):

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (1-\rho) \cdot \mu \cdot \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}$$

$$= (1-\rho) \cdot \mu \cdot e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n \cdot (\mu t)^n}{n!}$$

$$= (1-\rho) \cdot \mu \cdot e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = (1-\rho) \cdot \mu \cdot e^{-\mu t} \cdot e^{\lambda t}$$

$$= (1-\rho) \cdot \mu \cdot e^{(-\mu+\lambda)t} = (1-\rho) \cdot \mu \cdot e^{(-\mu+\mu\rho)t}$$

$$\boxed{w(t) = \mu \cdot (1-\rho) \cdot e^{-\mu(1-\rho)t}}$$

Эта вероятность описывает показательное распределение с интенсивностью $\mu \cdot (1-\rho)$.

Найдем математическое ожидание (среднее) времени нахождения в системе:

$$E(t) = \int_0^t w\,(t)dt = \frac{1}{\mu \,\cdot (1-\rho)} = W_s$$

Таким образом, дисциплина очереди не влияет на средние временные характеристики.

Модель $(M/M/1):(GD/N/\infty)$

В этой модели система работает с одним сервисом, однако вмещает не более N клиентов (максимальная длина очереди равна $N-1$). Примером таких систем может быть окно приема документов в регистрационную палату. Ситуация такова, что как только в системе число клиентов достигает N, ни один из дополнительных клиентов на обслуживание не принимается.

Отсюда

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0,1,\ldots,N-1, \\ 0, & n = N, N+1,\ldots, \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 0,1,\ldots .$$

Если $\rho = \lambda / \mu$, то

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0, & n = 0,1,\ldots,N-1, \\ 0, & n = N, N+1,\ldots. \end{cases}$$

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^N}, & \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{N+1}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{N+1}, & \rho = 1. \end{cases} , n = 0, 1, \ldots, N.$$

В данной модели ρ может больше или равно единицы (а не только меньше), т.к. поступление клиентов в систему ограничивается емкостью N. Клиенты будут потеряны, если в системе N клиентов, поэтому

$$\lambda_{потери} = \lambda p_N,$$

$$\lambda_{эфф} = \lambda - \lambda_{потери} = \lambda(1 - p_N).$$

Для «нормальной» системы $\lambda_{эфф} < \mu$ (ограничивать очередь нужно таким образом, чтобы система справлялась).

Среднее число клиентов тогда равно

$$L_s = \frac{\rho(1-(1+N-N\rho)\rho^N)}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)}.$$

При $L_s = 1/2$:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} np_n = \sum_{n=0}^{N} n\frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} n = \frac{1}{N+1} * \frac{N+1}{2} = 1/2.$$

Вывод формулы

$$L_s=\sum_{n=0}^{N} np_n=\sum_{n=0}^{N} n\frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\sum_{n=0}^{N} n\rho^n=$$

$$=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\left[\sum_{n=1}^{N}\rho^n+\sum_{n=2}^{N}\rho^n+\ldots+\sum_{n=N-1}^{N}\rho^n+\rho^N\right]=$$

$$=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\left[\rho\frac{1-\rho^N}{1-\rho}+\rho^2\frac{1-\rho^N}{1-\rho}+\ldots+\rho^{N-1}\frac{1-\rho^2}{1-\rho}+\rho^N\right]=$$

$$=\frac{1}{1-\rho^{N+1}}\left[\left(\rho-\rho^{N+1}\right)+\left(\rho^2-\rho^{N+1}\right)+\ldots+\left(\rho^{N-1}-\rho^{N+1}\right)+\rho^N\right]=$$

$$=\frac{1}{1-\rho^{N+1}}\left[\left(\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{N-1}\right)-N\rho^{N+1}+\rho^N\right]=$$

$$=\frac{1}{1-\rho^{N+1}}\left[\frac{\rho-\rho^N}{1-\rho}-N\rho^{N+1}+\rho^N\right]=$$

$$=\frac{1}{1-\rho^{N+1}}\left[\frac{\rho-\rho^N-N\rho^{N+1}+N\rho^{N+2}+\rho^N-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right]=$$

$$=\frac{\rho(1-(1+N-N\rho)\rho^N)}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)}.$$

Задача 2. В кафетерии имеется не более 20 мест. Посетители прибывают в соответствии с пуассоновским распределением с интенсивностью 10 человек в час и обслуживаются (каждый в отдельности) с интенсивностью 12 человек в час (Модель имеет вид (M/M/1) с ограничением на длину очереди).
1) Какова вероятность того, что очередной посетитель не сможет пообедать в кафетерии из-за нехватки свободных мест?
2) Предположим, что три посетителя кафетерия (каждый из которых прибывает случайным образом) хотели бы сидеть за одним столиком. Какова вероятность того, что их желание может быть выполнено? (Здесь предполагается, что всегда есть возможность посадить упомянутых посетителей вместе, если в кафетерии имеется больше трех свободных мест.)

Ответ: 1) 0,0044;
2) 0,9838.