НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА

Дисциплина «Вероятностные модели»

Тема «Экспоненциальное распределение, модели чистого рождения и чистой гибели»

Разработчик:
А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент
В.И. Белая, студент группы ВМИ-532
О.В. Быкова, студент группы ВМИ-532
Ю.Ф. Игошева, студент группы ВМИ-532
О.И. Бабина, студент группы ВМИ-213

Экспоненциальное распределение

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial t} = -\lambda(0,t) + \lambda \cdot p(-1,t)$$

p(-1,t)=0, т.к. рассматривается только поступление заявок

$$\int \frac{\partial p(0,t)}{\partial (0,t)} = \int -\lambda dt$$

$$\ln p(0,t) = -\lambda t + \ln C, t > 0$$

$$p(0,t) = e^{-\lambda t} \cdot C$$

$$p(0,0) = e^{-\lambda \cdot 0} \cdot C, \quad p(0,0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

<u>Вероятность ненаступления заявки в течение периода *t (n=0)*</u>

$$p(0,t) = e^{-\lambda t}$$

<u>Вероятность наступления хотя бы одной заявки в течение периода *t*</u>

$$p(n > 0,t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Функция распределения

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Плотность распределения

$$f(t) = \frac{dp(n > 0, t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$MO(t) = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{matrix} v = \lambda t & dv = \lambda dt \\ du = e^{-\lambda t} & u = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \Big|_0^{+\infty} +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt = -t e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty}$$

Математическое ожидание

$$m(t) = MO(t) = \frac{1}{\lambda} = \overline{T}$$

Экспоненциальное распределение

$$m\left(t^2\right)=\int_0^{+\infty}\lambda t^2 e^{-\lambda t}dt=\begin{vmatrix} v=\lambda t^2 & dv=2\lambda t dt \\ du=e^{-\lambda t}dt & u=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\cdot\lambda t^2\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\cdot 2\lambda t dt=-t^2\cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{\lambda}m(t)=\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{\lambda^2}$$

<u>Дисперсия</u>

$$D(t)=m\left(t^2\right)-\left(m(t)\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

<u>СКО</u>

$$\sigma=\frac{1}{\lambda}=m(t)$$

<u>Вероятность наступления заявки в диапазоне (t_1,t_2)</u>

$$\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda t_2}-1+e^{-\lambda t_1}=e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2}$$

Модель чистого рождения

Экспоненциальное распределение не дает ответа, какова вероятность наступления заданного числа событий для заданного периода времени t. Модель чистого рождения позволяет найти эту вероятность посредством решения дифференциальное уравнение для заданного n.

$$\frac{\partial p(n,t)}{\partial t} = -\lambda \cdot p(n,t) + \lambda \cdot p(n-1,t), \qquad (1)$$

причем $p(0,0) = 1;\ p(n > 0,0) = 0$ (2)

Дифференциальное уравнение вида:

$$f(x) = y' + a(x) \cdot y \qquad (3)$$

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$$

Общее решение такого уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int f(x)\mu(x)dx + C\right] \qquad (4)$$

Используя формулу (1), определим по индукции, какова вероятность наступления заданного числа событий *n* в заданного период времени *t*.

Для $n = 1$:

$$p(0,t) = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\partial p(1,t)}{\partial t} = -\lambda \cdot p(1,t) + \lambda \cdot p(0,t)$$

$$x = t; y = p(1,t); a(x) = \lambda; f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$$

$$p(1,t) = \frac{1}{e^{\lambda t}}\left[\int \lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt + C\right] = e^{-\lambda t}\left[\int \lambda dt + C\right] = e^{-\lambda t}[\lambda t + C]$$

$$p(1,0) = 0$$

$$p(1,0) = 0$$

$$p(1,t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Для $n = 2$:

$$p(1,t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\partial p(2,t)}{\partial t} = -\lambda \cdot p(2,t) + \lambda \cdot p(1,t)$$

$$x = t; y = p(2,t); a(x) = \lambda; f(x) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$$

$$p(2,t) = \frac{1}{e^{\lambda t}}\left[\int \lambda^2 t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt + C\right] = e^{-\lambda t}\left[\int \lambda^2 t dt + C\right] = e^{-\lambda t}\left[\frac{\lambda^2 t^2}{2} + C\right]$$

$$p(2,0) = 0$$

$$C = 0$$

$$p(2,t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}$$

Формула для расчета вероятности наступления числа событий n для заданного периода времени t для любого заданного $n = 0,1,2,\ldots$:

$$p(n,t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Математическое ожидание модели чистого рождения имеет следующий вид:

$$M(n,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} np(n,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$M(n,t)=\lambda t e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

При этом выражение $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ является разложением в ряд Тейлора степени λt, а значит, он примерно равен $e^{\lambda t}$.

$$M(n,t)=\lambda t e^{-\lambda t}e^{\lambda t}=\lambda t$$

Значит, за время t в среднем наступит λt событий.

Найдем дисперсию

$$D(n|T) = M(n^2|T) - M^2(n|T) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n,T) - \left[\sum_{n=0}^{\infty} nP(n,T)\right]^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} - \lambda^2 T^2 = \lambda T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-\lambda T}(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda^2 T^2 =$$

$$= \lambda T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1) e^{-\lambda T}(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda^2 T^2 =$$

$$= \lambda^2 T^2 + \lambda^2 T^2 - \lambda^2 T^2 = \lambda^2 T^2$$

Откуда среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D(n|T)} = \lambda T \, .$$

Задача 1. В небольшом городе рождение ребенка проходит с интенсивностью 12 минут. Время между рождениями распределено по экспоненциальному закону.

1) Найти вероятность, что за два часа родится 12 детей.
2) Среднее число рождений за год.
3) Вероятность того, что на протяжении одного дня не будет ни одного рождения.
4) Вероятность выдачи 50 свидетельств о рождении к концу третьего часа, если известно, что на протяжении последних двух часов было выдано 40 таких свидетельств.

Решение

1) Найдем интенсивность $\lambda = 60/12 = 5$ рождений в час.

Вероятность найдем по формуле

$P(n,T) = \dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}$, где $P(n,T)$ - это вероятность наступления n событий в течение интервала времени T

$$P(12,2) = (5*2)^{12} * e^{-5*2} / 12! \approx 9{,}5\% .$$

2) Интенсивность рождений в штате за год равна

λT = 120 x 365 = 43800 рождений.

3) Вероятность того, что на протяжении одного дня не родится ни один ребенок, вычисляется с использованием пуассоновского распределения (1 день = 24 часа)

$$P(n,T) = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}, \quad P(0,24) = e^{-5*24} \approx 0.$$

4) Заметим, что, поскольку распределение числа рождений является пуассоновским, искомая вероятность сводится к вероятности появления 10 (= 50 – 40) рождений за один (=3–2) час. Тогда

$$P(10,1) = e^{-5*1} * (5*1)^{10} / 10! = 0{,}01813.$$

Модель чистой гибели

- Пусть начальный момент времени $t = 0$,

N – количество заявок

- Требуется найти вероятность $P_K(t)$, то есть вероятность нахождения в системе K заявок к моменту времени t

$$0 \leq K \leq N$$

- При условии, что процесс обработки заявки имеет экспоненциальное распределение для времени с интенсивностью обслуживания μ:

$$\mu = \frac{N_{обслуженных\ \ заявок}}{T_{обслужвания}}$$

- Так как распределение времени имеет экспоненциальный характер, то модель гибели аналогична модели рождения, то есть обработка заявки аналогична поступлению заявки

- При обработке заявки число заявок в системе уменьшается на 1 единицу

- $\frac{dP_N(t)}{dt} = -\mu \cdot P_N(t)$ – дифференциальное уравнение , когда ни одна заявка не обработана

$$P_N(t) = e^{-\mu \cdot t}$$

$$\frac{dp(n,t)}{dt} = -\lambda \cdot p(n,t) + \lambda \cdot p(n-1,t)$$

- Общее уравнение:

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = -\mu \cdot p_K(t) + \mu \cdot p_{K+1}(t)$$

$$p_\text{к}(t) = \frac{(\mu \cdot t)^{N-K} e^{-\mu \cdot t}}{(N-K)!}$$

- $N-K$ – число обработанных заявок

$$1 \le K \le N$$

- Потенциально система может обработать больше заявок, чем в ней находится, следовательно, вероятность $p_0(t)$ должна включать в себя вероятность того, что система может обработать больше, чем N заявок
- Сумма всех вероятностей равна 1

$$\sum_{K=0}^{N} p_K(t) = 1$$

$$1 - \sum_{K=1}^{N} p_K(t) = p_0(t)$$

Задача 2. Магазин складирует 18 упаковок дорогих и скоропортящихся морепродуктов в начале каждой недели. В среднем продается 3 упаковки морепродуктов в день (за один раз продается одна упаковка), но действительный спрос подчиняется распределению Пуассона. Как только уровень запаса снижается до 5 упаковок, делается новый заказ на поставку 18 упаковок морепродуктов в начале следующей недели. Запасы по своей природе таковы, что все неиспользованные до конца недели морепродукты приходят в негодность и ликвидируются. Требуется вычислить следующие параметры системы (модель чистой гибели).

1) Вероятность размещения заказа к концу каждого дня недели.
2) Среднее количество морепродуктов, которые будут ликвидированы к концу недели.

Решение

В систему поступает 18 упаковок, т.е. N = 18. Интенсивность расхода (обслуживания) μ равна 3 упаковкам в день.

1) Для каждого дня определим вероятность, что в системе останется не больше 5 упаковок

$$P\{n \le 5, T\} = \sum_{n=0}^{5} P_n(T) = p_0(T) + \sum_{n=1}^{5} \frac{(\mu T)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!} \text{ для всех } T = 1, 2, \ldots, 7.$$

Нулевую вероятность $p_0(T)$ можно считать ТОЛЬКО по формуле

$$P_0(T) = 1 - \sum_{n=1}^{N} P_n(T).$$

<u>Получим следующие вероятности</u>: при T = 1 p = 0.0000;
при T = 2 p = 0.0088; при T = 3 p = 0.1242; при T = 4 p = 0.4240;
при T = 5 p = 0.7324; при T = 6 p = 0.9083; при T = 7 p = 0.9755.

2) Нужно найти <u>математическое ожидание</u> $M(n|t=7) = \sum_{n=1}^{18} np_n(7) = 0.664$.