НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВМИ

БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА

Дисциплина «Вероятностные модели»

Практикум по теме «Статические детерминированные системы управления запасами»

Разработчики:
А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент
Ю.Ф. Игошева, студент группы ВМИ-532
О.И. Бабина, студент группы ВМИ-213
О.В. Быкова, студент группы ВМИ-532

Задача 1. Лампы на улицах заменяются с интенсивностью 100 штук в день (b). Администрация заказывает эти лампы через равные промежутки времени. Стоимость заказа одной партии (c_1) – 90 д.е. Стоимость хранения ламп на складе (c_2) – 0,02 д.е. в день. Будем рассматривать общий период заказа Θ равным 30 дням.

1) Определите оптимальный объем заказа: n^*.
2) Определите затраты при оптимальном объеме заказа: $C(n^*)$
3) Округлите объем заказа n до целого значения: $n_{округл}$
4) Оцените изменение затрат при округлении n по формуле Тейлора: ΔC.
5) Найдите точное значение изменения затрат при округлении n: ΔC
6) Найдите промежуток времени между поставками для округленного значения n: $T(n_{округл})$

Задача 1 по теме «Статические детерминированные СУЗ»

Решение задачи 1

1) Найдем оптимальный объем заказа:

$$n^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot b}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \cdot 100}{0{,}02}} \approx 948{,}6833 \text{ штук}$$

2) Определим затраты при оптимальном объеме заказа $n*$:

$$\mathrm{C}(n^*) = \mathrm{C}_1(n^*) + \mathrm{C}_2(n^*)$$

$$\mathrm{C}_1(n^*) = \frac{\mathrm{c}_1 b\Theta}{n^*};\ \mathrm{C}_2(n^*) = \frac{1}{2}\mathrm{c}_2 n^*\Theta\,,$$

$$\mathrm{C}(n^*) = \frac{90 \cdot 100 \cdot 30}{948{,}6833} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 \cdot 948{,}6833 \cdot 30 \approx 569{,}21 \text{ д. е.}$$

3) Округлим объем заказа до целого значения: $n_{\text{округл}} = 949$. Найдем изменение объема заказа при округлении:

$$\Delta n = \left| n^* - n_{\text{округл}} \right| = 949 - 948{,}6833 = 0{,}3167 \text{ штук}$$

Задача 1 по теме «Статические детерминированные СУЗ»

4) Оценим изменение затрат ΔC при округлении n^* по формуле Тейлора:

$$\Delta C \approx \Delta n \cdot C'(n^*) + \frac{(\Delta n)^2}{2!} C''(n^*) = \frac{(\Delta n)^2}{2!} C''(n^*),$$

так как $C'(n^*) = 0$ - необходимое условие минимума общей функции затрат.

$$C'(n^*) = \frac{dC}{dn} = \left(\frac{c_1 b\Theta}{n^*} + \frac{1}{2} c_2 n^* \Theta\right)' = -\frac{c_1 b\Theta}{(n^*)^2} + \frac{1}{2} c_2 \Theta$$

$$C''(n^*) = \left(C'(n^*)\right)' = \frac{2c_1 b\Theta}{(n^*)^3}$$

Отсюда

$$\Delta C \approx \frac{(\Delta n)^2}{2!} \cdot \frac{2c_1 b\Theta}{(n^*)^3} = \frac{0{,}3167^2 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 30}{948{,}6833^3} \approx 3{,}17 \cdot 10^{-5} \text{д. е.}$$

5) Найдем точное значение изменения затрат ΔC при округлении n^*:

$$\Delta C = C(n_{\text{округл}}) - C(n^*) = \left(\frac{c_1 b\Theta}{n_{\text{округл}}} + \frac{1}{2} c_2 n_{\text{округл}} \Theta\right) - \left(\frac{c_1 b\Theta}{n^*} + \frac{1}{2} c_2 n^* \Theta\right)$$

$$= \Theta\left[\left(\frac{c_1 b}{n_{\text{округл}}} + \frac{1}{2} c_2 n_{\text{округл}}\right) - \left(\frac{c_1 b}{n^*} + \frac{1}{2} c_2 n^*\right)\right] =$$

$$= 30\ \left[\left(\frac{90 \cdot 100}{949} + \frac{1}{2} 0{,}02 \cdot 949\right) - \left(\frac{90 \cdot 100}{948{,}6833} + \frac{1}{2} 0{,}02 \cdot 948{,}6833\right)\right]$$

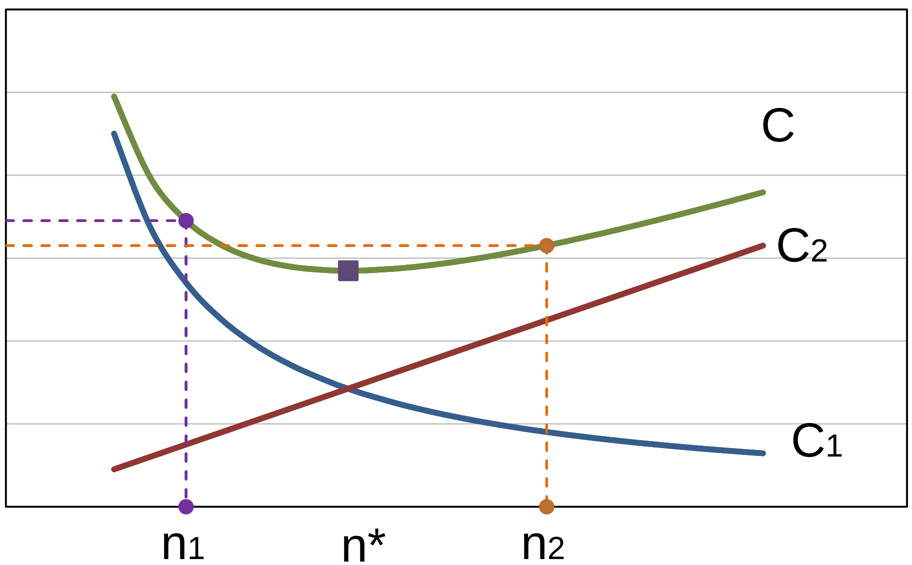
$$\approx 3{,}17 \cdot 10^{-5} \text{ д. е.}$$

6) Найдем промежуток времени между поставками для округленного значения $n_{\text{округл}}$: $T(n_{\text{округл}})$

$$T(n_{\text{округл}}) = \frac{n_{\text{округл}}}{b} = \frac{949}{100} = 9{,}49 \text{ дней}$$

Задача 1 по теме «Статические детерминированные СУЗ»

Задача 2. Изменим условия задачи 1. Пусть поставщик отгружает лампы ящиками по 100 штук. Неполный ящик не допускается. Найти значения показателей в соответствии с условием задачи 1.



Решение. При таком большом округлении в силу несимметричности функции общих затрат округление объема поставки до допустимого в условиях заданных ограничений значения в сторону с минимальным значением Δn не гарантирует меньших затрат

Задача 2 по теме «Статические детерминированные СУЗ»

Следовательно, для принятия решения об объеме партии необходимо: округлить объем партии в большую и меньшую стороны; для каждого из этих значений объема партии – рассчитать объем затрат и выбрать размер партии с минимальным объемом затрат.

1) Оптимальный объем заказа: $n^* = 948{,}6833$ штук.
   Округлим оптимальный объем до допустимого значения объема партии в большую и в меньшую сторону: $n_1 = 900$ штук; $n_2 = 1000$ штук
2) Найдем разницу округленных значений объемов партий по сравнению с оптимальным размером партии:
$$\Delta n_1 = |n_1 - n^*| = 48{,}6833 \text{ штук}$$
$$\Delta n_2 = |n_2 - n^*| = 51{,}3167 \text{ штук}$$
3) Для каждого из значений n_1 и n_2 оценим изменение затрат ΔC по формуле Тейлора:

$$\Delta \mathrm{C}(n_1) \approx \frac{(\Delta n_1)^2}{2!} \cdot \frac{2 c_1 b \Theta}{(n^*)^3} = \frac{48{,}6833^2 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 30}{948{,}6833^3} \approx 0{,}7495 \text{ д. е.}$$
$$\Delta \mathrm{C}(n_2) \approx \frac{(\Delta n_2)^2}{2!} \cdot \frac{2 c_1 b \Theta}{(n^*)^3} = \frac{51{,}3167^2 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 30}{948{,}6833^3} \approx 0{,}8328 \text{ д. е.}$$

Вывод: по приблизительным расчетам объемов затрат следует предпочесть объем партии $n_1 = 900$ штук.

4) Для каждого из значений n_1 и n_2 найдем точное значение изменения затрат ΔC:

$$\Delta \text{C}(n_1) = \text{C}(n_1) - \text{C}(n^*) = \left(\frac{\text{c}_1 b\Theta}{n_1} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n_1 \Theta\right) - \left(\frac{\text{c}_1 b\Theta}{n^*} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n^* \Theta\right)$$

$$= \Theta\left[\left(\frac{\text{c}_1 b}{n_1} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n_1\right) - \left(\frac{\text{c}_1 b}{n^*} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n^*\right)\right] =$$

$$= 30\ \left[\left(\frac{90 \cdot 100}{900} + \frac{1}{2}0{,}02 \cdot 900\right) - \left(\frac{90 \cdot 100}{948{,}6833} + \frac{1}{2}0{,}02 \cdot 948{,}6833\right)\right]$$

$$\approx 0{,}7900 \text{ д. е.}$$

$$\Delta \text{C}(n_2) = \text{C}(n_2) - \text{C}(n^*) = \left(\frac{\text{c}_1 b\Theta}{n_2} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n_2 \Theta\right) - \left(\frac{\text{c}_1 b\Theta}{n^*} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n^* \Theta\right)$$

$$= \Theta\left[\left(\frac{\text{c}_1 b}{n_1} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n_1\right) - \left(\frac{\text{c}_1 b}{n^*} + \frac{1}{2}\text{c}_2 n^*\right)\right] =$$

$$= 30\ \left[\left(\frac{90 \cdot 100}{1000} + \frac{1}{2}0{,}02 \cdot 1000\right) - \left(\frac{90 \cdot 100}{948{,}6833} + \frac{1}{2}0{,}02 \cdot 948{,}6833\right)\right]$$

$$\approx 0{,}7900 \text{ д. е.}$$

Вывод: по точным расчетам объемов затрат объем партии может быть любым из рассматриваемых (n_1 = 900 штук или n_2 = 1000 штук).

5) Найдем промежуток времени между поставками для округленных значений объемов партий n_1 и n_2:

$$T(n_1) = \frac{n_1}{b} = \frac{900}{100} = 9 \text{ дней}$$

$$T(n_2) = \frac{n_2}{b} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ дней}$$

Задача 3. Комплектующие продаются по 2500 руб. за единицу, но предполагается 10% скидка при покупке партии от 150 единиц и выше. Компания в день использует 20 единиц комплектующих. Стоимость размещения заказа равна 5000 руб., стоимость хранения единицы товара составляет 30 руб. в день. Следует ли компании воспользоваться скидкой? Постройте график функции общих затрат.

- Для рассматриваемой задачи имеем цену без учета скидки $p_1 = 2500 (руб / ед)$

$p_2 = 2500 \cdot (1 - 0{,}1) = 2250 \; (руб / ед)$ - цена с учетом предлагаемой поставщиком скидки при заказе свыше 150 единиц

Интенсивность спроса $b = 20 \; (ед / день)$

Стоимость размещения заказа $c_1 = 5000 \; (руб / заказ)$

Стоимость хранения единицы товара c_2 составляет $30 \; (руб / день)$

- Найдем точку минимума $\tilde{n}$ для функции общих затрат $\tilde{C} = \frac{c_1 \cdot b}{n} + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot n$ без учета оптовой скидки и затрат на дефицит в единицу времени:

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot b}{c_2}}; \qquad \tilde{n} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 20}{30}} = 81{,}65$$

- Подставим найденное значение $\tilde{n}$ в уравнение $\tilde{C}(\tilde{n}) = \frac{c_1 \cdot b}{\tilde{n}} + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot \tilde{n}$, получим:

$$\tilde{C}(\tilde{n}) = 2449{,}49$$

- Умножим уравнение общих затрат с учетом оптовой скидки на $\tilde{n}$, получим следующее уравнение:

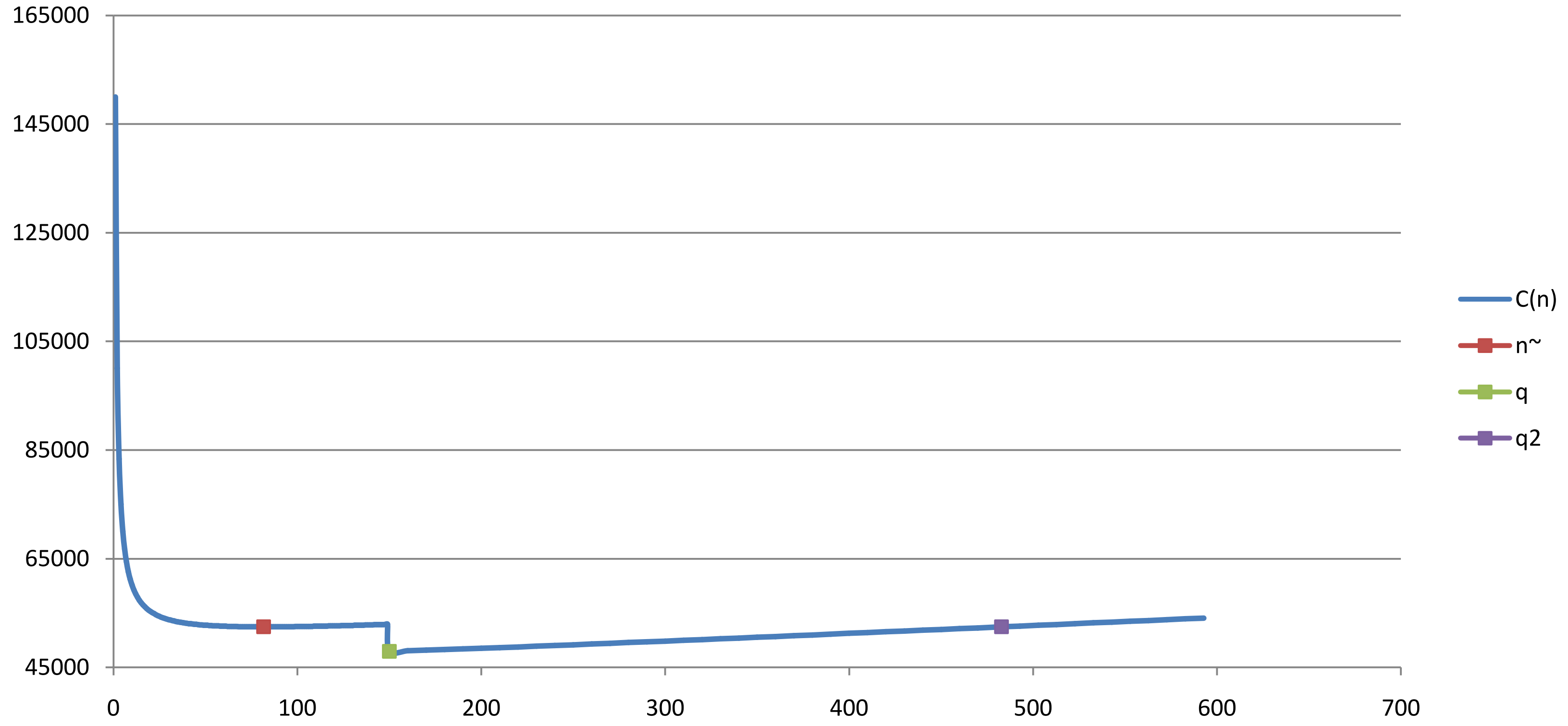
$$\frac{1}{2}\cdot c_2 \cdot n^2 - (\tilde{C}(\tilde{n}) - \left(p_2 - p_1\right)\cdot b)\cdot n + c_1 \cdot b = 0$$

- Найдем правый корень уравнения:

$$q_2 = 482{,}83$$

- Компании следует воспользоваться предоставляемой скидкой, так как при одинаковом значении функции общих затрат можно приобрести большее количество изделий

Построим график функции затрат и обозначим на нем точку минимума функции $\tilde{C}(n)$, точку объема, начиная с которого действует скидка и найденное оптимальное значение:



Задача 3 по теме «Статические детерминированные СУЗ»

Задача 4. Доказать, что затраты на заказ равны затратам на хранение при оптимальном размере партии для статической детерминированной модели без дефицита:

$$C_1\left(n^*\right)=C_2\left(n^*\right)$$

Доказательство:

$$C_1=c_1\cdot\frac{\theta\cdot b}{n};\qquad C_2=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\theta\cdot c_2;\qquad n^*=\sqrt{\frac{2\cdot c_1\cdot b}{c_2}}$$

$$C_1\left(n^*\right)=\frac{c_1\cdot\theta\cdot b}{\sqrt{\dfrac{2\cdot c_1\cdot b}{c_2}}}=\frac{c_1\cdot\theta\cdot b\cdot\sqrt{c_2}}{\sqrt{2\cdot c_1\cdot b}}=\frac{\sqrt{c_1}\cdot\theta\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c_2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{c_1\cdot b\cdot c_2}}{\sqrt{2}}\cdot\theta$$

$$C_2\left(n^*\right)=\frac{c_2\cdot\theta\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot c_1\cdot b}{c_2}}}{2}=\frac{c_2\cdot\theta\cdot\sqrt{2\cdot c_1\cdot b}}{\sqrt{c_2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{c_1\cdot b\cdot c_2}}{\sqrt{2}}\cdot\theta$$

$$\Rightarrow\quad C_1\left(n^*\right)=C_2\left(n^*\right)$$

$$C\left(n^*\right)=C_1\left(n^*\right)+C_2\left(n^*\right)=2\cdot\frac{\sqrt{c_1\cdot b\cdot c_2}}{\sqrt{2}}\cdot\theta=\theta\sqrt{2c_1c_2b}$$

Функция затрат на заказ является гиперболой, функция затрат на хранение – линейная и прямо зависит от оптимального размера партии. Значит, характер функции общих затрат будет меняться с убывающей на возрастающую в точке пересечения двух функций затрат. Это ситуация компромисса двух конфликтующих показателей затрат. Убыток от хранения должен быть равен убытку от размещения заказа.

Задача 5. Химическое предприятие производит партиями органическое вещество. Годовая интенсивность спроса на эту продукцию составляет 100000 кг. Можно считать, что спрос известен точно и что его интенсивность во времени не меняется. Фиксированные затраты на изготовление партии равны 500 ден. ед. Переменные издержки производства равны 2 ден. ед. на 1 кг. Издержки по учету требований, не реализованных вовремя, ее составляют 5 ден. ед. на 1 кг в год. Определить оптимальный размер партии и оптимальное число учтенных требований

Решение. Для рассматриваемой задачи имеем: затраты на заказ – 500, затраты на хранение – 2, норма затрат на одну единицу дефицита – 5. Тогда, оптимальный размер партии по формуле Уилсона: $\bar{n} = \sqrt{\dfrac{2c_1 b}{c_2}} = 7071{,}068$

Следовательно, плотность убытков из-за дефицита $\rho = \dfrac{c_3}{c_2 + c_3} = 0.714$

Максимальный размер дефицита $s^* = \sqrt{\dfrac{2c_1 b c_2}{(c_3 + c_2)c_3}} = 2390{,}457$

Максимальный размер запаса $r^* = 5976{,}143$

В конечном счете, определяем оптимальный размер партии через плотность убытков из-за дефицита

$$n^* = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\rho}} = 8366.6$$