НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВМИ

БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА

# Дисциплина «Вероятностные модели»
## Тема «Метод Хэдли-Уайтин для стохастических СУЗ»

Разработчики:
А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент
О.В. Быкова, студент группы ВМИ-432

В рандомизированной модели оптимального размера партии с использованием резервного запаса вероятностная структура спроса учитывается опосредованно, только в конце, когда определяется страховой запас. Рассмотрим более точную модель, в которой вероятностная структура спроса учитывается непосредственно в постановке задачи.

Неудовлетворенный спрос в течение срока выполнения заказа спрос накапливается. Распределение проса в течение срока выполнения заказа является стационарным (неизменным) во времени.

*Обозначения*

$f(x)$ – плотность распределения спроса в течение срока выполнения заказа $L$;

$b$ – ожидаемое значение спроса в единицу времени;

$c_2$ – удельные затраты на хранение (на единицу продукции за единицу времени);

$c_3$ – удельные потери от неудовлетворенного спроса (на единицу продукции за единицу времени);

$c_1$ – стоимость размещения заказа;

$s$ – размер заказа;

$J_L$ - уровень запаса, при котором делается заказ (точка заказа).

*Стоимость размещения заказов в единицу времени*

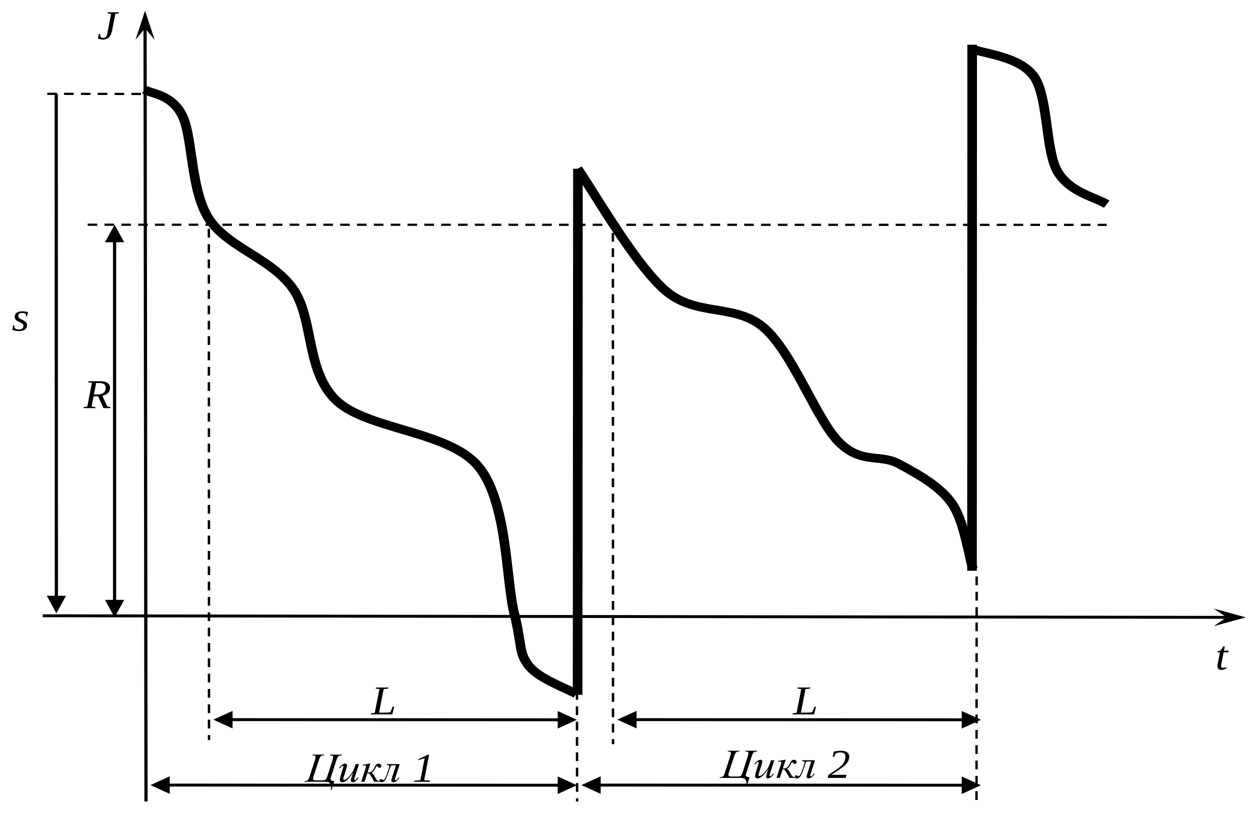
Среднее число заказов в единицу времени равно $\bar{k} = \frac{b}{s}$, отсюда мат.ожидание стоимости размещения заказов в единицу времени равно $\overline{C}_1 = c_1 b / s$.

*Ожидаемые затраты на хранение в единицу времени*

Средний уровень запаса равен

$$\bar{J} = \frac{s + M(J_L - x) + M(J_L - x)}{2} = \frac{s}{2} + M(J_L - x) = \frac{s}{2} + J_L - M(x),$$

где $M(x)$ - математическое ожидание спроса за период выполнения заказа.




**Алгоритм Хедли-Уайтин**

За срок выполнения заказа запас $J_L$ может превысить реальный спрос за этот период. Средняя величина этого превышения равна $M(J_L - x)$. Это минимальный уровень запаса. Когда заказ поступает, запас увеличивается на величину заказа $s + M(J_L - x)$ (максимальный уровень запаса). При этом игнорируется случай, когда величина $(J_L - x)$ является отрицательной (допущение модели).

Отсюда ожидаемые затраты на хранение в единицу времени равны $\overline{C}_2 = c_2 \bar{J} = c_2 \left( \frac{s}{2} + J_L - M(x) \right)$.

*Ожидаемые потери из-за неудовлетворенного спроса в единицу времени*

Дефицит возникает при $x > J_L$. Ожидаемый дефицит за один цикл поставок равен

$$D = \int_{J_L}^{+\infty} (x - J_L) f(x) dx . \qquad (1)$$

Тогда ожидаемые затраты из-за неудовлетворенного спроса за один цикл поставок равны $c_3 D$. За единицу времени будут произведены $b/s$ циклов поставки.

Откуда ожидаемые затраты, связанные с дефицитом в единицу времени будут равны

$$\overline{C}_3 = c_3 Db / s = \frac{c_3 b}{s} * \int_{J_L}^{+\infty} (x - J_L) f(x) dx.$$

<u>*Общие ожидаемые затраты в единицу времени*</u>

$$\overline{C}(s, J_L) = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3 = \frac{c_1 b}{s} + c_2 \left( \frac{s}{2} + J_L - M(x) \right) + \frac{c_3 b}{s} * \int_{J_L}^{+\infty} (x - J_L) f(x) dx.$$

Эти затраты нужно минимизировать. Функция общих затрат является выпукло, поэтому в точке минимума частные производные по переменным будут равны нулю. Т.е. получаем следующую систему уравнений.

$$\frac{\partial \overline{C}}{ds} = -\frac{c_1 b}{s^2} + \frac{c_2}{2} - \frac{c_3 b}{s^2} D = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{dJ_L} = 0 + c_2 - \frac{c_3 b}{s} \int_{J_L}^{+\infty} f(x)dx = 0. \qquad (3)$$

Отсюда оптимальные значения $s^*$ и $J_L^*$ можно найти следующим образом.

$$s^* = \sqrt{\frac{2b(c_1 + c_3 D)}{c_2}}; \qquad (4)$$

$$\int_{J_L}^{+\infty} f(x)dx = \frac{c_2 s^*}{c_3 b}. \qquad (5)$$

Из этих уравнений нельзя определить $s^*$ и $J_L^*$ в явном виде, для их нахождения используется численный алгоритм, предложенный Хедли и Уайтин. Доказано, что алгоритм сходится за конечное число итераций, если допустимое решение существует.

При $J_L = 0$ формула (1) примет следующий вид

$$D = \int_{J_L}^{+\infty} (x - J_L) f(x) dx = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = M(x).$$

А формулы (4) и (5) можно преобразовать следующим образом.

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{2b(c_1 + c_3 M(x))}{c_2}};$$

$$\tilde{s} = \frac{c_3 b}{c_2} \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

Если $\tilde{s} \geq \hat{s}$, тогда существуют единственные оптимальные значения для $s$ и $J_L$.

***Алгоритм*** состоит из следующих шагов.

*Шаг 0*. Принимаем в начале $D^0 = 0$. Считаем $J_L{}^0 = 0$.

Принимаем $s^1 = \sqrt{\dfrac{2bc_1}{c_2}}$. Полагаем $i = 1$ и переходим к шагу $i$.

*Шаг i*. Используем значение $s^i$ для определения значения $J_L{}^i$ из уравнения (5). Если $J_L{}^i \approx J_L{}^{i-1}$, то останов; оптимальными значениями считаем $J_L{}^* = J_L{}^i$ и $s^* = s^i$.

Иначе используем значение $J_L{}^i$ для вычисления $s^{i+1}$ через уравнение (4). Полагаем $i = i + 1$ и повторяем шаг $i$.

**Задача 2.** Компания использует химикат в количестве 1000 литров в месяц. Размещение заказа на новую поставку обходится в 100 денежных единиц. Стоимость хранения 1 литра за месяц составляет 2 денежные единицы. Потери от дефицита равны 10 денежных единиц в месяц за 1 литр. Спрос в период поставки является случайной величиной равномерно распределенной от 0 до 100 литров. Определить оптимальную политику управления запасами.

***Решение***

Исходя из условия задачи имеем: $c_1 = 100$ д.ед./л месяц, $b = 1000$ литров, $c_2 = 2$ д.ед./л месяц, $c_3 = 10$ д.ед./л месяц. Поскольку спрос в период поставки является случайной величиной равномерно распределённой, то математическое ожидание равно $M(x) = 50$, а функция распределения спроса в течении срока выполнения заказа – $f(x) = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{100-0} = \dfrac{1}{100}$.

Рассчитаем нижнюю оценку размера заказа по следующей формуле: $\hat{s}=\sqrt{\dfrac{2b(Dc_3+c_1)}{c_2}}=774{,}6$ л. Верхняя оценка равна: $\tilde{s}=\dfrac{c_3 b}{c_2}=5000$ л. Алгоритм Хедли-Уайтина будет иметь решение, так как выполняется неравенство $\tilde{s}\geq\hat{s}$. Выполняем алгоритм пошагово. На нулевом шаге $D=0$, $Y_L=0$. Ожидаемый дефицит для представленной задачи имеет вид:

$$D=\int_{Y_L}^{100}(x-Y_L)\frac{1}{100}dx=\frac{1}{100}\left(\frac{Y_L^2}{2}-100Y_L+5000\right).$$

Уровень запаса, при котором делается заказ, находим из уравнения $\int_{Y_L}^{100}\frac{1}{100}dx=\frac{2S}{10000}$. Следовательно, $Y_L=100-\frac{s}{50}$. На первом шаге $s^*=\sqrt{\dfrac{2b(Dc_3+c_1)}{c_2}}=316{,}23$, $Y_L=93{,}68$, $D=0{,}1997$. Выполняем аналогичным образом итерации до тех пор, пока значения $s^*, Y_L$ перестают изменяться.

В таблице представлены расчетные значения.

| Итерация | $S^*$ | $Y_L$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 319,37 | 93,612 | 0,2040 |
| 3 | 319,44 | 93,611 | 0,2041 |
| 4 | 319,43 | 93,611 | 0,2041 |
| 5 | 319,43 | 93,611 | 0,2040 |

В данном случае следует остановиться на шаге 4. Из полученных значений делаем вывод, что необходимо заказывать около 320 литров, когда запас снизится до 94 литров.