НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВМИ

БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА

Дисциплина «Вероятностные модели»

Тема «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Разработчики:
А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент
Е.Л. Шпигель, студент группы ВМИ-532
Ю.Ф. Игошева, студент группы ВМИ-532
В.И. Белая, студент группы ВМИ-532

В одноэтапных моделях управления запасами для удовлетворения спроса в течение определенного периода продукция заказывается только один раз (пример – модный сезонный товар). Спрос удовлетворяется мгновенно в начале периода непосредственно после получения заказа.

Задача модели состоит в определение оптимального объема заказа, который минимизирует суммарные ожидаемые затраты, связанные с закупкой, хранением и неудовлетворенным спросом. При известном оптимальном значении s^* эффективной стратегией управления запасами состоит в размещении заказа объемом $s^* - J_0$, если $s^* > J_0$; в противном случае заказ не размещается.

Обозначения

p – стоимость закупки единицы продукции;

$f(x)$ – плотность распределения случайного спроса x за рассматриваемый период;

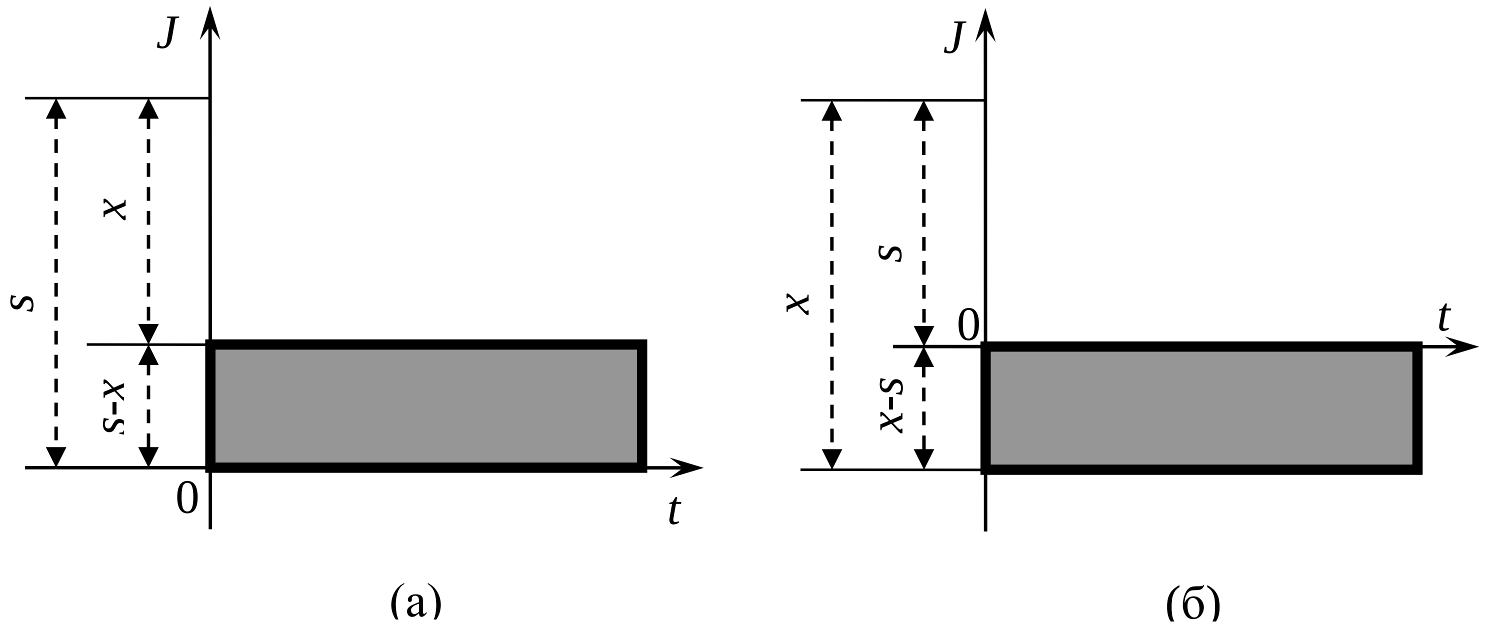
c_2 – удельные затраты на хранение (на единицу продукции за рассматриваемый период);

c_3 – удельные потери от неудовлетворенного спроса (на единицу продукции за рассматриваемый период);

c_1 – стоимость размещения заказа;

s – размер заказа;

J_0 – наличный запас продукта перед размещением заказа..


J
x
s
s-x
0
t
(а)
J
s
x
0
t
x-s
(б)

Ожидаемые затраты на хранение за рассматриваемый период

$$C_2 = c_2 \int_0^s (s - x) f(x) dx.$$

Ожидаемые затраты из-за неудовлетворенного спроса за рассматриваемый период

$$C_3 = c_3 \int_s^\infty (x - s) f(x) dx.$$

Затраты на приобретение

$$C_4 = p(s - J_0).$$

$$\frac{dC}{ds} = c_2 \int_0^s f(x)dx - c_3 \int_s^{+\infty} f(x)dx + p = 0$$

$$c_2 F(s^*) - c_3 (1 - F(s^*)) + p = 0$$

Обозначим $\int_0^s f(x)dx = F(s)$, а $\rho = \frac{c_3 - p}{c_2 + c_3}$. Таким образом, при оптимальном уровне заказа $s*$ должно выполняться ***критическое отношение***.

$$F(s*) = \rho .$$

Значение $s*$ определено только при условии, что критическое отношение неотрицательно, т.е. $c_3 \geq p$. Случай, когда $c_3 < p$, является бессмысленным, так как это предполагает, что стоимость закупки единицы продукции выше потери от неудовлетворенного спроса.

В случае дискретного распределения спроса

$$C_2 = c_2 \cdot \sum_{x=0}^{s} (s - x) f(x),$$

$$C_3 = c_3 \cdot \sum_{x=s}^{\infty} (x - s) f(x),$$

$$C_4 = \rho \cdot (s - J_0),$$

$$C = C_2 + C_3 + C_4,$$

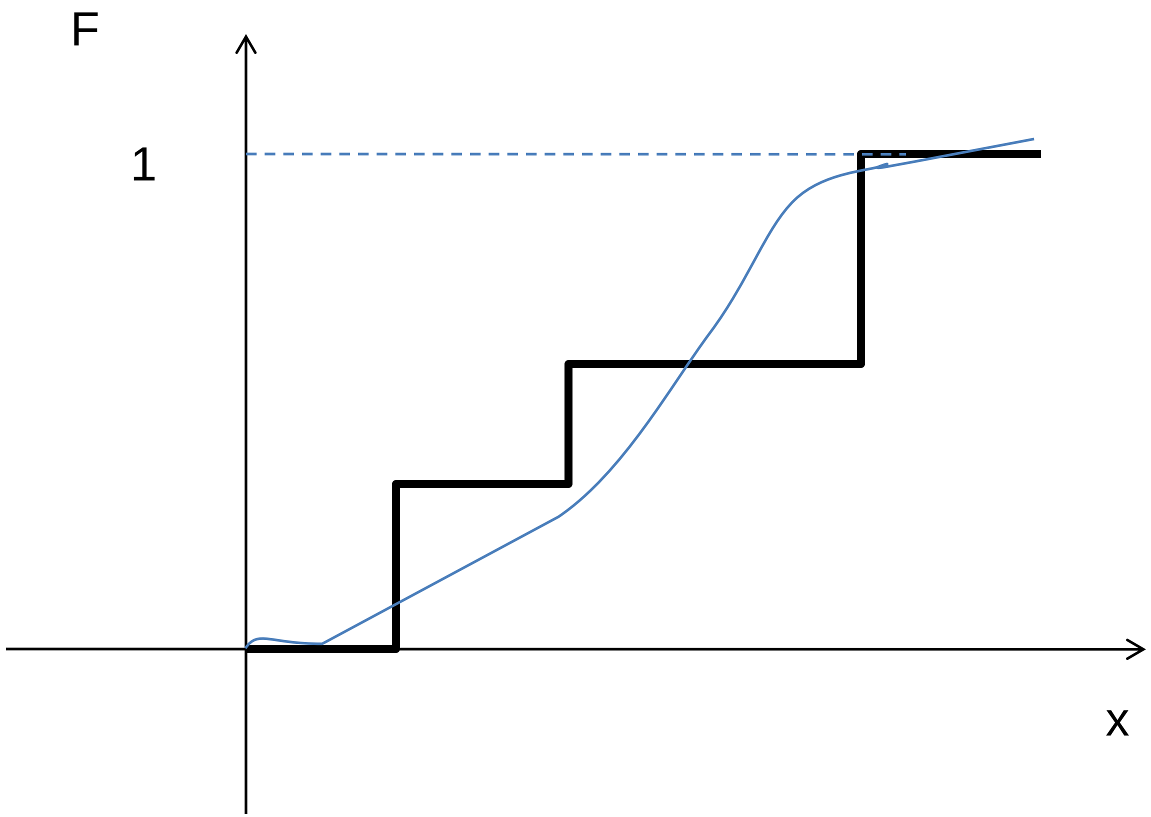
$$c_2 \cdot \sum_{x=0}^{s} (s - x) f(x) + c_3 \cdot \sum_{x=s}^{\infty} (x - s) f(x) + p \cdot (s - J_0) \to \min$$

Необходимые условия минимума:

$$C(s^* - 1) \geq C(s^*),$$

$$C(s^* + 1) \geq C(s^*).$$

Эти условия не являются достаточными для глобального минимума. Для этого функция распределения должна иметь следующий вид



$$C\left(s^*-1\right)=c_2\cdot\sum_{x=0}^{s}\left(s^*-1-x\right)f\left(x\right)+c_3\cdot\sum_{x=s}^{\infty}\left(x-s^*+1\right)f\left(x\right)+$$
$$+p\cdot\left(s^*-1-J_0\right),$$

$$C\left(s^*-1\right)=C\left(s^*\right)-c_2\cdot\sum_{x=0}^{s^*-1}f\left(x\right)+c_3\cdot\sum_{x=s^*}^{\infty}f\left(x\right)-p.$$

$$C\left(s^*-1\right)\geq C\left(s^*\right),C\left(s^*-1\right)-C\left(s^*\right)\geq 0,$$

$$c_2\cdot\sum_{x=0}^{s^*-1}f\left(x\right)-c_3\cdot\sum_{x=s^*}^{\infty}f\left(x\right)-p\geq 0,$$

$$c_2\cdot F\left(s^*-1\right)-c_3+c_3\cdot F\left(s^*-1\right)-p\geq 0,$$

$$\left(c_2+c_3\right)\cdot F\left(s^*-1\right)\leq p+c_3$$

$$\boldsymbol{F\left(s^*-1\right)\leq\rho}$$

Аналогично из $C\left(s^{*}+1\right) \geq C\left(s^{*}\right)$ следует $F\left(s^{*}\right) \geq \rho$

Отсюда найдем условие для s^*.

$$F(s^*-1) \leq \rho \leq F(s^*),$$

где $F(s)=\sum_{x=0}^{s} f(x)$.

Стохастическая одноэтапная модель управления запасами при наличии затрат на оформление заказа

Обозначим мат.ожидание общих затрат за рассматриваемый период времени без учета затрат на оформление как *C(s)*, а с учетом затрат на оформление как $\tilde{C}(s)$. Так как модель является одноэтапной, то заказ будет размещаться только один раз, поэтому

$C(s)$ – ожидаемые общие затраты без затрат на размещение заказа

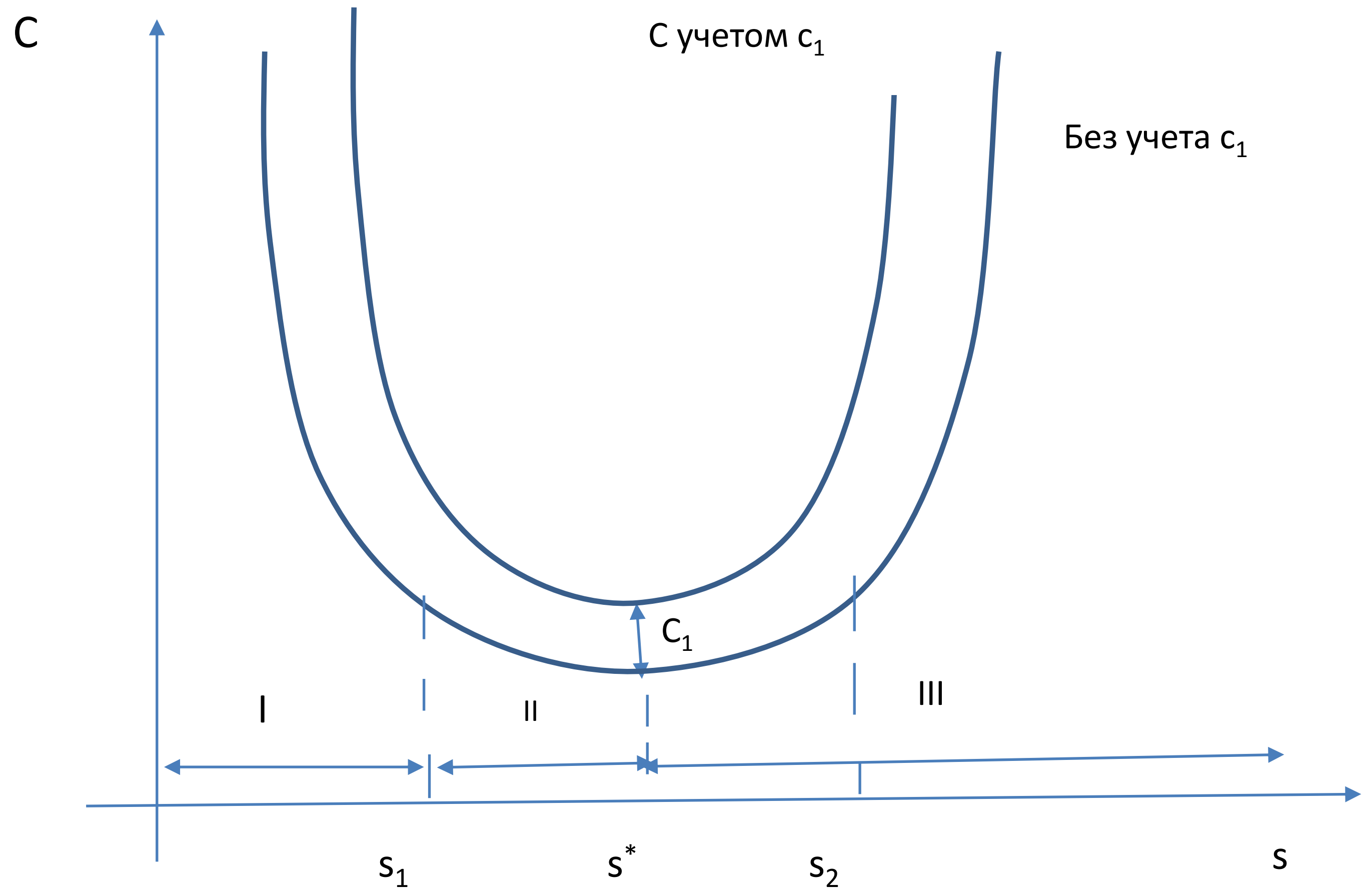
s – размер заказа

$\tilde{C}(s)$ – ожидаемые общие затраты с учетом затрат на размещение

$$\tilde{C}(s) = C(s) + c_1$$

Затраты на оформление заказа являются постоянными, они не влияют на величину оптимального размера заказа. Поэтому оптимальный размер заказа s^* для $\tilde{C}(s^*)$ совпадает с оптимальным размером для $C(s^*)$

s_1, s_2 – соответственно левый и правый корень уравнения ожидаемых общих затрат $\tilde{C}(s^*)$



Стохастическая одноэтапная модель управления запасами при наличии затрат на оформление заказа

Задача формулируется следующим образом: какое количество продукции необходимо заказывать, если наличный запас перед размещением заказа составляет   единиц и необходимо минимизировать общие затраты?

J_0 может попасть в **3 зоны**

I зона

$J_0 < s_1$

Так как в наличие имеется J_0 единиц продукции, издержки содержания запаса составляют $C(J_0)$. Если заказывается любое дополнительное количество $s - J_0 > 0$, то соответствующие затраты при величине запаса s равны $\tilde{C}(s)$. $\min\limits_{s^* - J_0} \tilde{C}(s)$ будет в точке (s^*), так как $\tilde{C}(s^*) < C(J_0)$.

Стохастическая одноэтапная модель управления запасами при наличии затрат на оформление заказа

II зона

$s_1 < J_0 < s^*$

$$\min\left(\tilde{C}(s)\right) = \tilde{C}\left(s^*\right)$$

$$\min\left(C(s)\right) = C\left(s^*\right)$$

$$\tilde{C}\left(s^*\right) > C\left(J_0\right)$$

Размещать заказ необоснованно

III зона

$J_0 > s^*$

Не имеет смысла размещать заказ, так как наличный запас J_0 уже достаточен

Если затраты на размещение заказа незначительны, то $s_1 \approx s^*$ и затраты C_1 можно не учитывать