НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВМИ

БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА

Дисциплина «Вероятностные модели»
Тема «Статические детерминированные системы управления запасами»

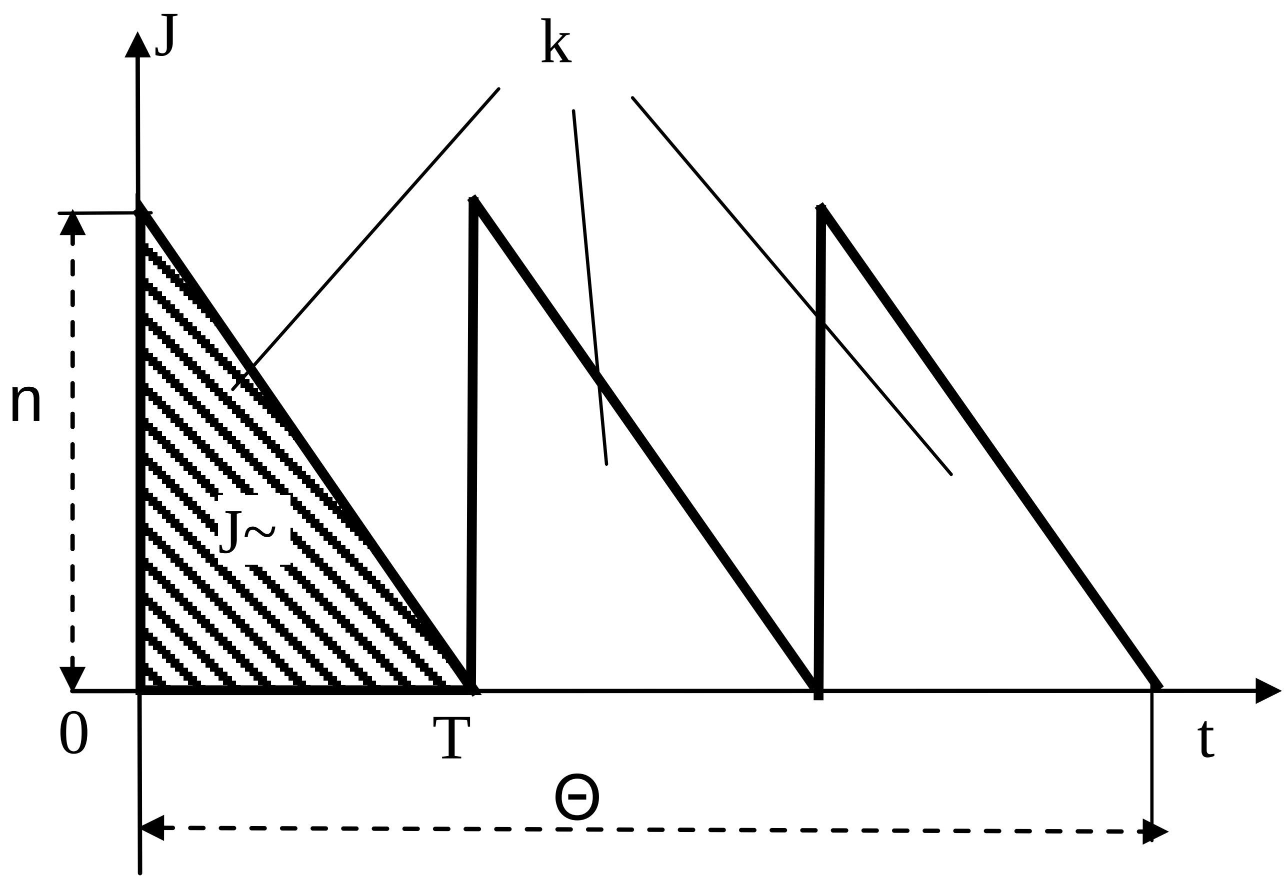
Разработчики:
А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент
Н.И. Верзилов, студент группы ВМИ-213
Ю.Ф. Игошева, студент группы ВМИ-532
Е.Л. Шпигель , студент группы ВМИ-532
О.И. Бабина, студент группы ВМИ-213
В.И. Белая, студент группы ВМИ-532

Статические детерминированные системы управления запасами без дефицита

Пусть $b(t)$ - интенсивность спроса в момент t, тогда спрос $B(t)$ за период от 0 до T составит $B(T)=\int_0^T b(t)dt$. Пусть спрос за период Θ равен N единиц запаса, интенсивность спроса постоянна $b=\text{const}$, тогда $b=\frac{N}{\Theta}$. Поставки осуществляются партиями (каждая партия отдельно). Обозначим n - размер партии в единицах товара, а k - количество партий, которое требуется заказать за период Θ.

Партия поступает на склад, как только на нем закончится запас. В начальный момент времени $t = 0$ партия поступила на склад. Тогда время между поступлениями партий составит $T = \Theta / k$. Обозначим $J(t)$ - уровень запасов в момент времени t. В момент t $(0 \le t \le T)$ запас равен $J(t) = n - bt$. При $t = T$ запас равен нулю $n - bT = 0 \Leftrightarrow T = n / b$. Откуда $k = \Theta b / n$.

Динамика запасов



Статические детерминированные системы управления запасами без дефицита

Известны также стоимость заказа одной партии c_1 и тариф за хранения одной единицы запаса за одну единицу времени c_2. Тогда затраты на заказ составят $C_1 = c_1 k$, а на хранение $C_2 = c_2 \tilde{J} k$, где $\tilde{J} = \int_{t=0}^{T} J(t)dt$ - это размер накопленного запаса за период длиной T. $\tilde{J}$ - это площадь заштрихованного треугольника $\tilde{J} = 1/2 * nT$.

Статические детерминированные системы управления запасами без дефицита

Отсюда общие затраты составят

$$C = C_1 + C_2 = c_1 k + \frac{1}{2} c_2 n T k = \Theta(c_1 b / n + c_2 n / 2)$$

.

Требуется найти размер партии *n*, при котором общие затраты на заказ партий и хранение будут минимальны:

$$C = \Theta(c_1 b / n + c_2 n / 2) \to \min_n .$$

Необходимым условием оптимальности является равенству нулю производной по n:

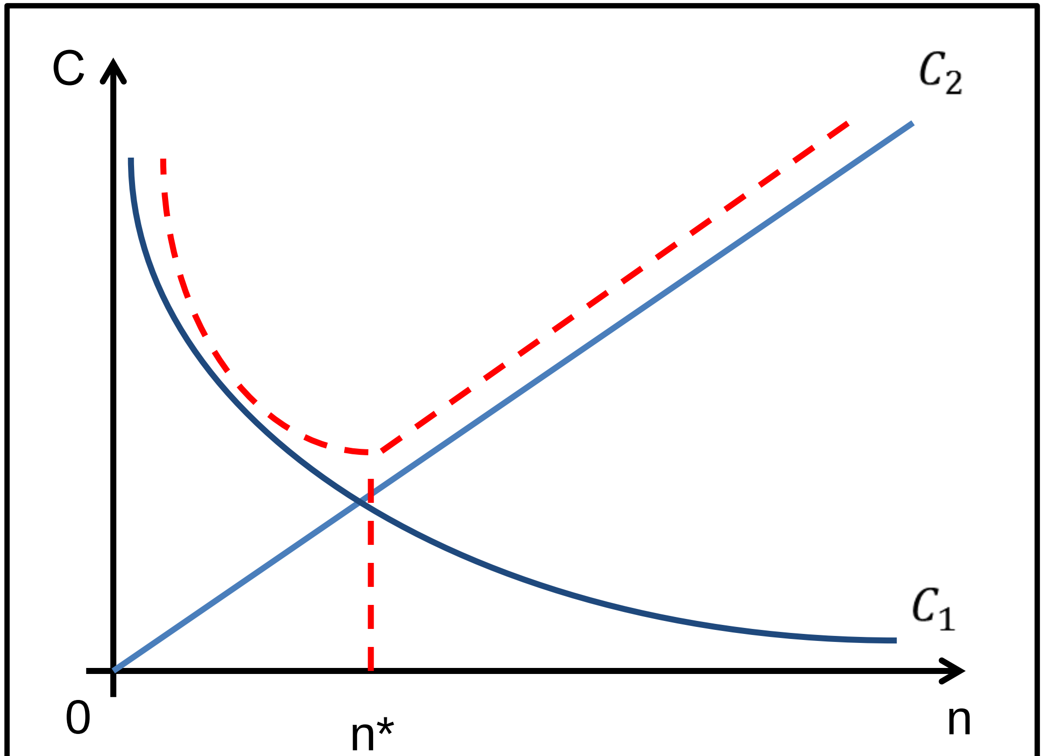
$$dC/dn = \Theta(c_1 b/n + c_2 n/2)' = 0.$$

Откуда $-c_1 b/n^2 + c_2/2 = 0$.

Таким образом, оптимальный размер партии равен

$$n^* = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}}.$$

График затрат в единицу времени



Условие $C^{'}(n) = 0$

Является необходимым, но недостаточным условием. Необходимо чтобы функция была выпукла:

$$C''(n) > 0$$

$$\frac{d\overline{C'}}{n} = -\frac{C_1 b}{n^2} - \frac{1}{2} C_2 = 0$$

$$\frac{d\overline{C'}}{dn^2} = -\frac{2C_1 b}{n^3} > 0$$

$$n^* = \sqrt{\frac{2C_1 b}{C_2}}$$

точка минимума

В точке минимума затраты на заказ равны затратам на хранение

$$C_1(n) = C_2(n)$$

T^* - оптимальное время между поступлениями на склад

$$T^* = \frac{n^*}{b} = \sqrt{\frac{2C_1}{C_2 b}}$$

Статические детерминированные системы управления запасами без дефицита

Точка заказа определяется эффективным временем выполнения заказа.
Эффективное время выполнения заказа – это время из которого вычли целое число циклов пополнения.

$t_{эфф}$ − время выполнения заказа
$=> j(\text{точка заказа}) = t_{эфф} * b$

- Часто оптимальный размер партии по формуле Уилсона является нецелым числом

Формула Уилсона: $n^* = \sqrt{\dfrac{2 \cdot c_1 \cdot b}{c_2}}$

В связи с этим возникает вопрос: в какую сторону округлять?

- Для этого воспользуемся ***формулой Тейлора для разложения функции с помощью производных***

$$\Delta C = C\left(n^* + \Delta n\right) - C\left(n^*\right) > 0$$

$$\Delta C = \frac{(\Delta n)}{1!} \cdot C'\left(n^*\right) + \frac{(\Delta n)^2}{2!} \cdot C''\left(n^*\right) + \frac{(\Delta n)^3}{3!} \cdot C'''\left(n^*\right) + \ldots + R$$

Оставим только первые два члена ряда:

$$\Delta C \approx \frac{(\Delta n)}{1!} \cdot C'\left(n^*\right) + \frac{(\Delta n)^2}{2!} \cdot C''\left(n^*\right)$$

- Так как $C'\left(n^*\right) = \Theta \cdot \left(-\frac{c_1 \cdot b}{n^2} + \frac{c_2}{2} \right) = 0$, а $C''\left(n^*\right) = \frac{2 \cdot c_1 \cdot N}{n^3}$,
- получим:

$$\Delta C = \frac{(\Delta n)^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot c_1 \cdot N}{\left(n^*\right)^3}$$

ΔC прямо зависит от $(\Delta n)^2$, это означает, что чем меньше Δn, тем меньше увеличение затрат ΔC, следовательно, размер заказа стоит округлять до ближайшего целого при малом значении Δn

Учет оптовой скидки в статических детерминированных системах управления запасами без дефицита

Пусть C_1 – затраты на размещение заказа;
C_2 – затраты на хранение;
C_4 – затраты на приобретение.

Затраты на приобретение учитываются, только в случае, если предоставляется скидка в зависимости от объема заказа. Если скидки нет, то эти затраты постоянны, поэтому не будут влиять на минимизацию функции общих затрат.

Пусть q – объем заказа, начиная с которого начинает действовать оптовая скидка.
Если объем заказа $n < q$, тогда цена p_1.
Если объем заказа $n \geq q$, тогда цена p_2.

Затраты на приобретение за период Θ вычисляется по формуле:

$$C_4 = p \cdot n \cdot k = p \cdot N = \begin{cases} p_1 \cdot N, & n < q \\ p_2 \cdot N, & n \geq q \end{cases}$$

$$N = b \cdot \Theta$$

Учет оптовой скидки в статические детерминированные системы управления запасами без дефицита

Среднее значение затрат на приобретение в единицу времени можно вычислить по формуле:

$$\overline{C_4} = \frac{C_4}{\Theta} = \begin{cases} p_1 \cdot b, & n < q \\ p_2 \cdot b, & n \geq q \end{cases}$$

С учетом оптовой скидки, необходимо минимизировать функцию общих затрат $C(n)$:

$$C(n) = C_1 + C_2 + C_4 \rightarrow min$$

Вместо функции общих затрат, можно минимизировать среднее общих затрат:

$$\bar{C}(n) = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_4 \rightarrow min$$

Подставим в функцию среднего общих затрат формулы для вычисления ее составляющих:

$$\bar{C}(n) = \frac{c_1 \cdot b}{n} + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot n + p(n) \cdot b$$

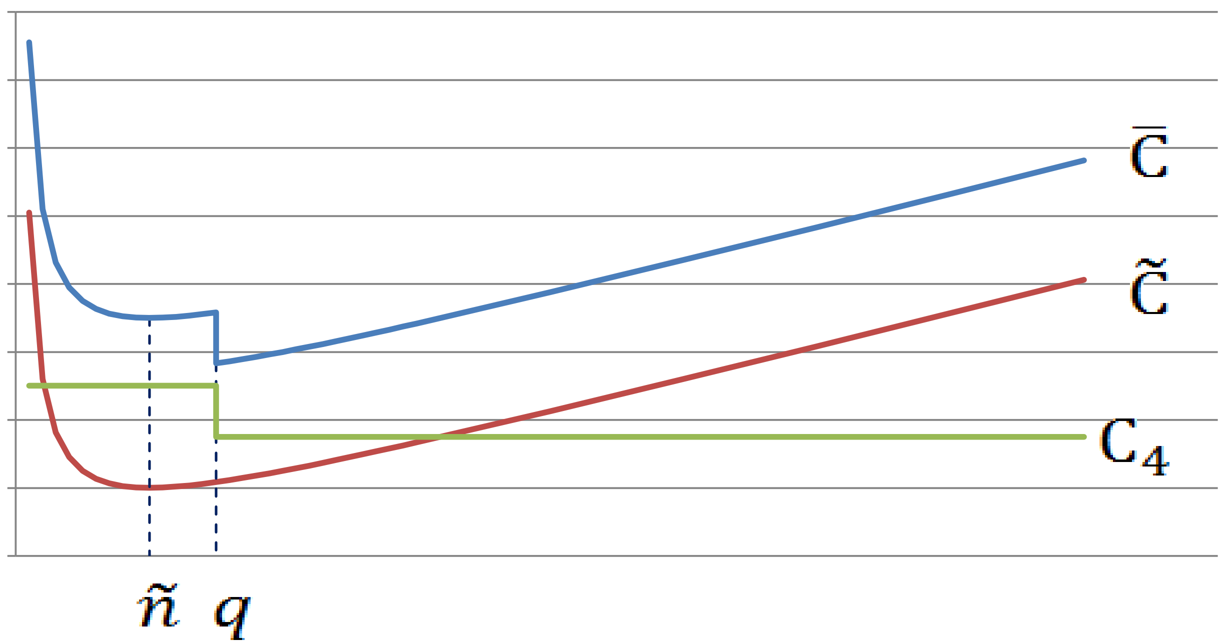
Учет оптовой скидки в статические детерминированные системы управления запасами без дефицита

Пусть $\tilde{C}$ – среднее затрат на приобретение заказа без учета оптовой скидки:

$$\tilde{C} = \frac{c_1 \cdot b}{n} + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot n$$

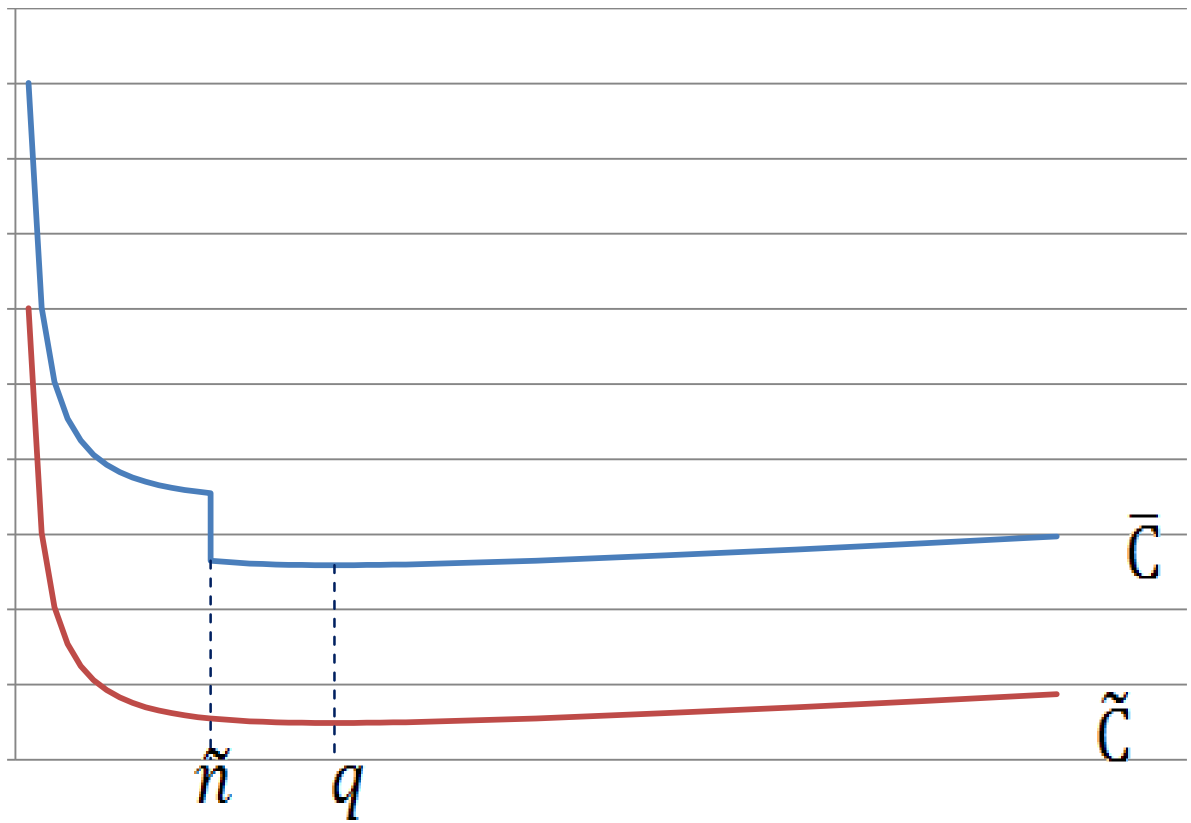
Тогда $\tilde{n}$ – точка минимума функции $\tilde{C}$:

$$\tilde{n} = \arg\min \tilde{C}(n) = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}}$$



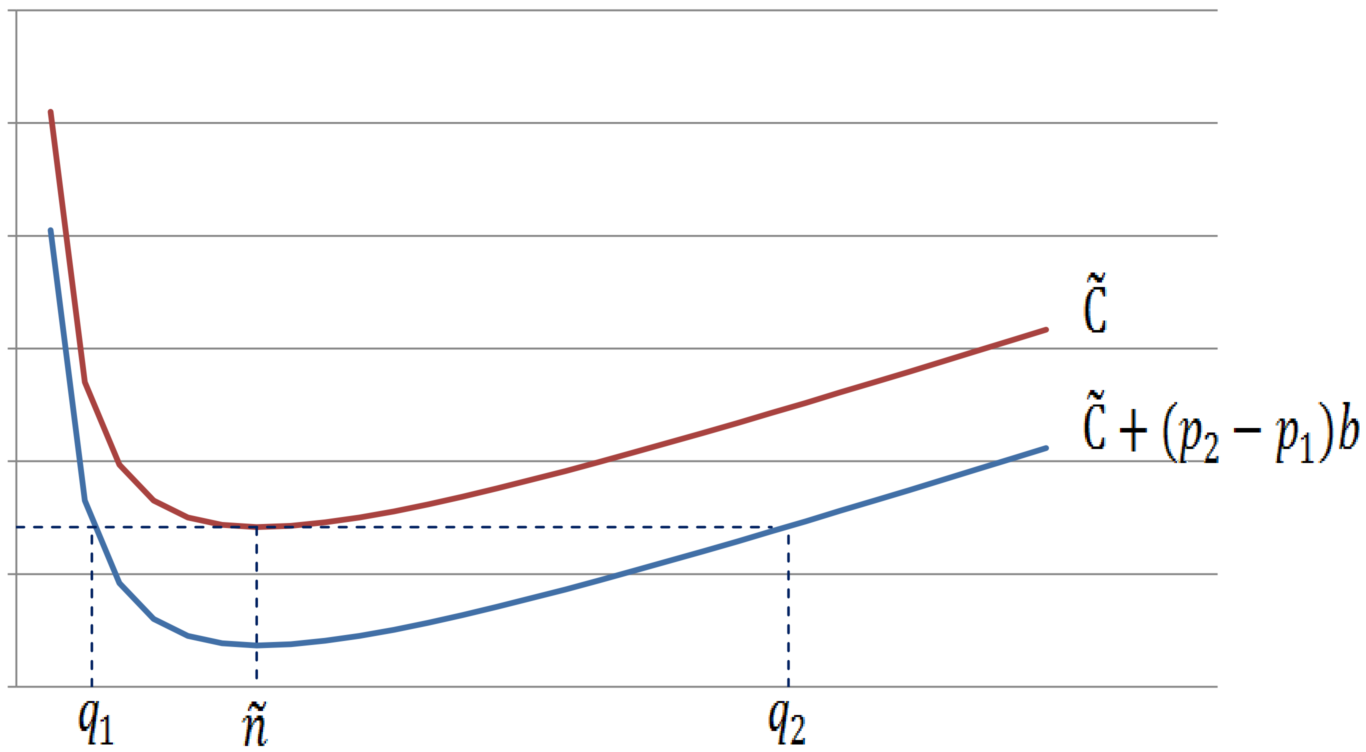
Как можно видеть на рисунке в точке q происходит разрыв – график смещается вниз на величину $(p_2 b - p_1 b) = (p_2 - p_1)b$, где величина $(p_1 - p_2)$ – размер скидки на единицу продукции.

Учет оптовой скидки в статические детерминированные системы управления запасами без дефицита



Если $q < \tilde{n}$, тогда точка разрыва будет находиться левее точки минимума и не будет влиять на минимизацию функции средних общих затрат $\bar{C}$

Учет оптовой скидки в статические детерминированные системы управления запасами без дефицита



Отобразим на графике функцию средних общих затрат без учета оптовой скидки $\tilde{C}$ и функцию, отображающую затраты при закупке по цене со скидкой – $\tilde{C} + (p_2 - p_1)b$

Учет оптовой скидки в статические детерминированные системы управления запасами без дефицита

Точки q_1 и q_2 являются решением уравнения:

$$\tilde{C}(n) = \tilde{C}(\tilde{n}) + (p_2 - p_1)b$$

- Если точка разрыва q такова, что $q \in (\tilde{n}, q_2)$, тогда точка разрыва находится ниже точки минимума и заказ в объеме q ведет к минимизации функции общих затрат $\bar{C}$. В этом случае следует заказывать q единиц в одной партии.
- Если $q > q_2$, тогда точка разрыва будет выше точки минимума. В этом случае следует заказывать $\tilde{n}$ единиц в одной партии.

Статическая детерминированная модель управления запасами с учетом затрат на дефицит

В такой модели дефицит допускается, дефицит накапливается, а затем погашается поставкой продукции размером ***n***-единиц.

r – максимальный размер запаса.

s – максимальный размер дефицита.

$$n = r + s$$

Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

T_1 – период, за который исчерпывается положительный запас.

T_2 – период, в течение которого накапливается дефицит.

Время между поставками составляет:

$$T = T_1 + T_2$$

$c_з$ – норма затрат на 1 единицу дефицита в 1 единицу времени.

$C_з$ – затраты на дефицит за период Θ.

Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

Число периодов дефицита равно числу поставок и равно k .

$\tilde{J}_D$ – накопленный дефицит за один цикл.

$$\tilde{J}_D = \frac{1}{2}\cdot s\cdot T_2, \quad T_2 = \frac{s}{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{J}_D = \frac{s^2}{2\cdot b}.$$

$$C_3 = c_3\cdot \tilde{J}_D \cdot k = c_3 \cdot \frac{s^2\cdot\Theta}{2\cdot(r+s)}$$

$\tilde{J}_D \cdot k$ – накопленный дефицит за весь период.

$$C_1 = c_1\cdot k = c_1\cdot\frac{b\cdot\Theta}{r+s}, \quad C_2 = c_2\cdot\tilde{J}\cdot k = \frac{c_2\cdot r^2\cdot\Theta}{2\cdot(r+s)},$$

$\tilde{J} = \dfrac{r^2}{2\cdot b}$ – накопленный запас.

C – общие затраты

$$C = \Theta \cdot \left(\frac{2 \cdot c_1 \cdot b + c_2 \cdot r^2 + c_3 \cdot s^2}{2 \cdot (r+s)} \right).$$

$$C(r,s) \to \min, \overline{C}(r,s) \to \min$$

$$\overline{C} = \frac{2 \cdot c_1 \cdot b + c_2 \cdot r^2 + c_3 \cdot s^2}{2 \cdot (r+s)} \to \min_{r,s}$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial r} = \frac{2 \cdot c_2 \cdot r \cdot (r+s) - c_2 \cdot r^2 - 2 \cdot c_1 \cdot b - c_3 \cdot s^2}{2 \cdot (r+s)^2},$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial s} = \frac{2 \cdot c_3 \cdot s \cdot (r+s) - c_2 \cdot r^2 - 2 \cdot c_1 \cdot b - c_3 \cdot s^2}{2 \cdot (r+s)^2}.$$

Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

$$c_2 \cdot r = c_3 \cdot s,$$

$$r = \frac{c_3}{c_2} \cdot s, s = \frac{c_2}{c_3} \cdot r.$$

Произведем замену r в формуле $\dfrac{\partial \overline{C}}{\partial s}$ и приравняем к нулю.

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial s} = \frac{\mathbf{2} \cdot \left(\frac{c_3}{c_2} \cdot s + s \right) \cdot c_3 \cdot s - \mathbf{2} \cdot c_1 \cdot b - c_2 \cdot \frac{c_3^2}{c_2} \cdot s^2 - c_3 \cdot s^2}{\mathbf{2} \cdot \left(\frac{c_3}{c_2} \cdot s + s \right)} = \mathbf{0}.$$

$$C(r,s) \to min$$

$$\bar{C}(r,s) \to min$$

$$\bar{C} = \frac{2\mathrm{c}_1 b + \mathrm{c}_2 r^2 + \mathrm{c}_3 s^2}{2(r+s)} \to \min_{r,s}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{c}_2 r(r+s) - (2\mathrm{c}_1 b + \mathrm{c}_2 r^2 + \mathrm{c}_3 s^2)}{(r+s)^2} = 0 \\ \frac{\partial \bar{C}}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{c}_3 s(r+s) - (2\mathrm{c}_1 b + \mathrm{c}_2 r^2 + \mathrm{c}_3 s^2)}{(r+s)^2} = 0 \end{aligned}\right] =>$$

$$=> \mathrm{c}_2 r = \mathrm{c}_3 s => r = \frac{\mathrm{c}_3}{\mathrm{c}_2} s$$

Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

$$\left(\frac{c_3}{c_2}s + s\right)2c_3 s - (2c_1 b + c_2(\frac{c_3}{c_2}s)^2 + c_3 s^2 = 0$$

$$\frac{2c_3^2 s^2}{c_2} + 2c_3 s^2 - 2c_1 b - \frac{c_3^2}{c_2}s^2 - c_3 s^2 = 0$$

$$s^2\left(2\frac{c_3^2}{c_2} + 2c_3 - \frac{c_3^2}{c_2} - c_3\right) = 2c_1 b$$

$$s^2\left(\frac{c_3^2}{c_2} + c_3\right) = 2c_1 b$$

$$s^2 = \frac{2c_1 b c_2}{c_3^2 + c_2 c_3}$$

Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

$$s^* = \sqrt{\frac{2bc_1c_2}{c_3{}^2 + c_3c_2}} = \sqrt{\frac{2bc_1c_2}{c_3(c_3+c_2)}}$$

$$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3}$$

$$r^* = \frac{c_3}{c_2} * s^* = \sqrt{\frac{2bc_1c_3}{c_2(c_3+c_2)}} = \sqrt{\frac{2bc_1\rho}{c_2}}$$

$$n^* = s^* + r^* = \frac{c_2 + c_3}{c_2} * s^* = \sqrt{\frac{2bc_1(c_2 + c_3)}{c_2c_3}}$$

Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

Из полученного уравнения выразим *s**,а потом *r** и *n**.

$$s^2 = \frac{2 \cdot c_1 \cdot b}{c_3^2 + c_3}$$

$$s^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot b}{c_3^2 + c_3}}, \qquad r^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot b}{c_2 \cdot (c_2 + c_3)}} = \frac{c_3}{c_2} \cdot s^*$$

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot b}{c_2}}, \rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3}$$

ρ – плотность убытков из-за дефицита.

Пусть $c_з \to \infty, \rho \to \mathbf{1}, r^* \to \tilde{n}, s^* \to \mathbf{0}.$

Если норма затрат на дефицит очень большая, то это равнозначно недопущению дефицита.

$$r^* = \tilde{n} \cdot \sqrt{\rho}.$$

$$n^* = r^* + s^* = r^* + \frac{c_2}{c_3} \cdot r^* = \frac{r^*}{\rho} = \frac{\tilde{n}}{\sqrt{\rho}}.$$

$$T_1 = \frac{r^*}{b}, T_2 = \frac{s^*}{b}, T = \frac{n^*}{b}.$$

Доказательство выпуклости функции общих затрат для модели с дефицитом

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \theta \cdot \left(\frac{2c_1 b + c_2 r^2 + c_3 s^2}{2 \cdot (r+s)} \right); \qquad \overline{C} = \frac{C}{\theta} = \frac{2c_1 b + c_2 r^2 + c_3 s^2}{2 \cdot (r+s)}$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial r} = \frac{4c_2 r^2 + 4c_2 rs - 4c_1 b - 2c_2 r^2 - 2c_3 s^2}{4 \cdot (r+s)^2} = \frac{c_2 r^2 + 2c_2 rs - 2c_1 b - c_3 s^2}{2 \cdot (r+s)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r^2} = \frac{(2c_2 r + 2c_2 s) \cdot 2 \cdot (r+s)^2 - (c_2 r^2 + 2c_2 rs - 2c_1 b - c_3 s^2) \cdot 4 \cdot (r+s)}{4 \cdot (r+s)^4} =$$

$$= \frac{2c_2 r^2 + 2c_2 rs + 2c_2 sr + 2c_2 s^2 - 2c_2 r^2 - 4c_2 rs + 4c_1 b + 2c_3 s^2}{2 \cdot (r+s)^3} =$$

$$= \frac{c_2 s^2 + 2c_1 b + c_3 s^2}{(r+s)^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r^2} > 0}$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial s} = \frac{4c_3rs + 4c_3s^2 - 4c_1b - 2c_2r^2 - 2c_3s^2}{4\cdot(r+s)^2} = \frac{2c_3rs + c_3s^2 - 2c_1b - c_2r^2}{2\cdot(r+s)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial s^2} = \frac{(2c_3r + 2c_3s)\cdot 2\cdot(r+s)^2 - (2c_3rs + c_3s^2 - 2c_1b - c_2r^2)\cdot 4\cdot(r+s)}{4\cdot(r+s)^4} =$$

$$= \frac{2c_3r^2 + 2c_3rs + 2c_3rs + 2c_3s^2 - 4c_3rs - 2c_3s^2 + 4c_1b + 2c_2r^2}{2\cdot(r+s)^3} =$$

$$= \frac{c_2r^2 + 2c_1b + c_3r^2}{(r+s)^3}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial s^2} > 0$$

Статическая детерминированная модель управления запасами с дефицитом

$$\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r \partial s} = \frac{(2c_2 r - 2c_3 s)\cdot 2\cdot (r+s)^2 - (c_2 r^2 + 2c_2 rs - 2c_1 b - c_3 s^2)\cdot 4\cdot (r+s)}{4\cdot (r+s)^4} =$$

$$= \frac{2c_2 r^2 + 2c_2 rs - 2c_3 rs - 2c_3 s^2 - 2c_2 r^2 - 4c_2 rs + 4c_1 b + 2c_3 s^2}{2\cdot (r+s)^3} =$$

$$= \frac{-c_2 rs - c_3 rs + 2c_1 b}{(r+s)^3} = \frac{-rs(c_2 + c_3) + 2c_1 b}{(r+s)^3}$$

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{C}}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r \partial s} \\ \dfrac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r \partial s} & \dfrac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r^2} \end{pmatrix}$$

* Матрица Гессе – должна быть положительна определена, $\det H > 0$

$$\det H = \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial s^2}\cdot \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial r \partial s}\right)^2$$

$$\det H=\frac{c_2r^2+2c_1b+c_3r^2}{(r+s)^3}\cdot\frac{c_2s^2+2c_1b+c_3s^2}{(r+s)^3}-\left(\frac{-rs\cdot(c_2+c_3)+2c_1b}{(r+s)^3}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(c_2r^2+2c_1b+c_3r^2\right)\cdot\left(c_2s^2+2c_1b+c_3s^2\right)}{(r+s)^6}-\frac{\left(-c_2rs-c_3rs+2c_1b\right)\cdot\left(-c_2rs-c_3rs+2c_1b\right)}{(r+s)^6}=$$

$$=\frac{c_2^2r^2s^2+2c_1c_2br^2+c_2c_3r^2s^2+2c_1c_2bs^2+4c_1b^2+2c_1c_3bs^2+c_2c_3r^2s^2+2c_1c_3br^2+c_3^2r^2s^2}{(r+s)^6}-$$

$$-\frac{c_2^2r^2s^2+c_2c_3r^2s^2-2c_1c_2brs+c_2c_3r^2s^2+c_3^2r^2s^2-2c_1c_3brs-2c_1c_2brs-2c_1c_3brs+4c_1^2b^2}{(r+s)^6}=$$

$$=\frac{2c_1c_2br^2+2c_1c_2bs^2+2c_1c_3bs^2+2c_1c_3br^2+4c_1c_2brs+4c_1c_3brs}{(r+s)^6}=$$

$$=\frac{2c_1br^2\cdot(c_2+c_3)+2c_1bs^2\cdot(c_2+c_3)+4c_1brs\cdot(c_2+c_3)}{(r+s)^6}=\frac{2c_1b\cdot(c_2+c_3)\cdot\left(r^2+2rs+s^2\right)}{(r+s)^6}=$$

$$=\frac{2c_1b\cdot(c_2+c_3)}{(r+s)^4}$$

$$\det H>0\quad\blacksquare$$