



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ



БЛАГОТВОРИТЕЛЬНЫЙ
ФОНД В. ПОТАНИНА



Дисциплина «Вероятностные модели»

Практикум по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Разработчики:

А.Т. Латипова, к.ф.м.н., доцент

Е.Л. Шпигель, студент группы ВМИ-532

Ю.Ф. Игошева, студент группы ВМИ-532

В.И. Белая, студент группы ВМИ-532

О.И. Бабина, студент группы ВМИ-213

Задача 1. Вывести формулу оптимального размера заказа для одноэтапной стохастической модели при равномерном распределении функции спроса на участке $x \in [a, b]$.

Решение

$$F(s^*) = \rho,$$

$$F(s^*) = \int_a^{s^*} f(x) dx = \int_a^{s^*} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^{s^*} = \frac{s^* - a}{b-a} = \rho,$$

$$s^* = \rho \cdot (b - a) + a.$$

Задача 1 по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Задача 2. Доказать выпуклость функции общих ожидаемых затрат для одноэтапной стохастической модели при равномерном распределении функции спроса на участке $x \in [a, b]$.

Решение. Функция общих затрат в одноэтапной стохастической модели в общем случае имеет вид:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ = c_1 + c_2 \int_0^s (s - x)f(x)dx + c_3 \int_s^\infty (x - s)f(x)dx + p(s - J_L)$$

При равномерном распределении функция плотности распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}, \text{ где } x \in [a, b]$$

Функция одной переменной выпукла, когда ее вторая производная неотрицательная на заданном интервале.

Задача 2 по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Найдем первую производную по s для функции общих затрат:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{ds} &= c_2 \int_a^s f(x)dx - c_3 \int_s^b f(x)dx + p = c_2 \int_a^s \frac{1}{b-a} dx - c_3 \int_s^b \frac{1}{b-a} dx + p \\ &= c_2 \frac{1}{b-a} x \Big|_a^s - c_3 \frac{1}{b-a} x \Big|_s^b + p = c_2 \frac{s-a}{b-a} - c_3 \frac{b-s}{b-a} + p \\ &= \frac{c_2 s - c_2 a - c_3 b + c_3 s}{b-a} + p = \frac{(c_2 + c_3)s - c_2 a - c_3 b}{b-a} + p\end{aligned}$$

Найдем вторую производную по s для функции общих затрат:

$$\frac{d^2C}{ds^2} = \frac{c_2 + c_3}{b-a} > 0$$

Вторая производная строго больше нуля, так как c_2 и c_3 положительны, и $b > a$ по условию задачи.

Таким образом, функция общих затрат при равномерном распределении строго выпукла на отрезке $[a, b]$ ■

Задача 3. Дневной спрос на продукцию в течение одного периода удовлетворяется мгновенно в начале периода. Спрос является случайной величиной, равномерно распределённой от 0 до 10 единиц. Стоимость хранения одной единицы продукции равна 15 руб., а штраф за дефицит одной единицы продукции равен 135 руб. Стоимость единицы продукции равна 15 руб., стоимость размещения заказа равна 750 руб. Необходимо определить оптимальную стратегию заказа продукции.

Задача 3 по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Решение

Плотность равномерного распределения равна

$$f(x) = 1/(10 - 1) = 0,1.$$

Плотность убытков равна $\rho = (135-15) / (135+15) = 120/150 = 0,8$. Так как $P(x \leq s^*) = (1/10)s^* = 0,8$; отсюда

$$s^* = 8.$$

Т.е. оптимальный размер заказа 8 единиц.

Задача 4. В одноэтапной модели управления запасами стоимость закупки единицы продукции равна 10 ден.ед., а стоимость её хранения — 1 ден.ед. Найдите область допустимых значений удельных потерь от неудовлетворённого спроса в оптимальном случае, если объем заказа равен 4 единицам. Также предполагается, что спрос удовлетворяется мгновенно в начале периода, и что плотность распределения величины спроса представляется следующей таблицей.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0,05	0,1	0,1	0,2	0,25	0,15	0,05	0,05	0,05

Решение

Рассчитайте функцию вероятности (кумуляту) для каждого

значения $x = 4 \sum_{x=0}^4 f(x) = F(4)$ и $x = 3 \sum_{x=0}^3 f(x) = F(3)$. Затем

используйте отношение $F(s^* - 1) \leq \rho \leq F(s^*)$. Отсюда найдите интервал для ρ , откуда найдите интервал для удельных потерь от неудовлетворённого спроса c_3 .

Ответ: $19 \leq c_3 \leq 35,7$.

Задача 4 по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Задача 5. Дневной спрос на продукцию в течение одного периода удовлетворяется мгновенно в начале периода. Спрос является случайной величиной, равномерно распределенной от 0 до 10 единиц. Стоимость хранения одной единицы продукции на протяжении периода равно 50 руб., штраф за дефицит единицы продукции – 450 руб. Стоимость единицы продукции равна 50 руб., стоимость размещения заказа 2500 руб. Определить оптимальную стратегию заказа продукции.

Задача 5 по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Решение

Определим сначала s^* . Для этого найдем критическое соотношение

$$\frac{c_3 - p}{c_3 + c_2} = \frac{450 - 50}{450 + 50} = 0.8 = F(s^*).$$

Распределение спроса равномерное, поэтому

$$f(x) = \frac{1}{10 - 0} = 0.1,$$

$$F(s^*) = \int_0^{s^*} f(x) dx = \int_0^{s^*} 0.1 dx = 0.1s^* = 0.8.$$

Тогда $s^* = 8$.

Найдем функцию ожидаемых общих затрат с оформлением заказа при $s = s^*$:

$$\begin{aligned}M[\tilde{C}(s^*)] &= p(s^* - s_0) + c_2 \int_0^{s^*} (s^* - x) f(x) dx + c_3 \int_{s^*}^{10} (x - s^*) f(x) dx + c_1 = \\&= 50(8 - s_0) + 50 \int_0^8 (8 - x) 0.1 dx + 450 \int_8^{10} (x - 8) 0.1 dx + 2500 = \\&= 400 - 50s_0 + 50 * 0.1(64 - 64/2) + 450 * 0.1(100/2 - 64/2 - 80 + 64) + 2500 = \\&= 400 - 50s_0 + 160 + 90 + 2500 = 3150 - 50s_0\end{aligned}$$

Задача 5 по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»

Чтобы найти s_1 приравняем данные 2 формулы для затрат.

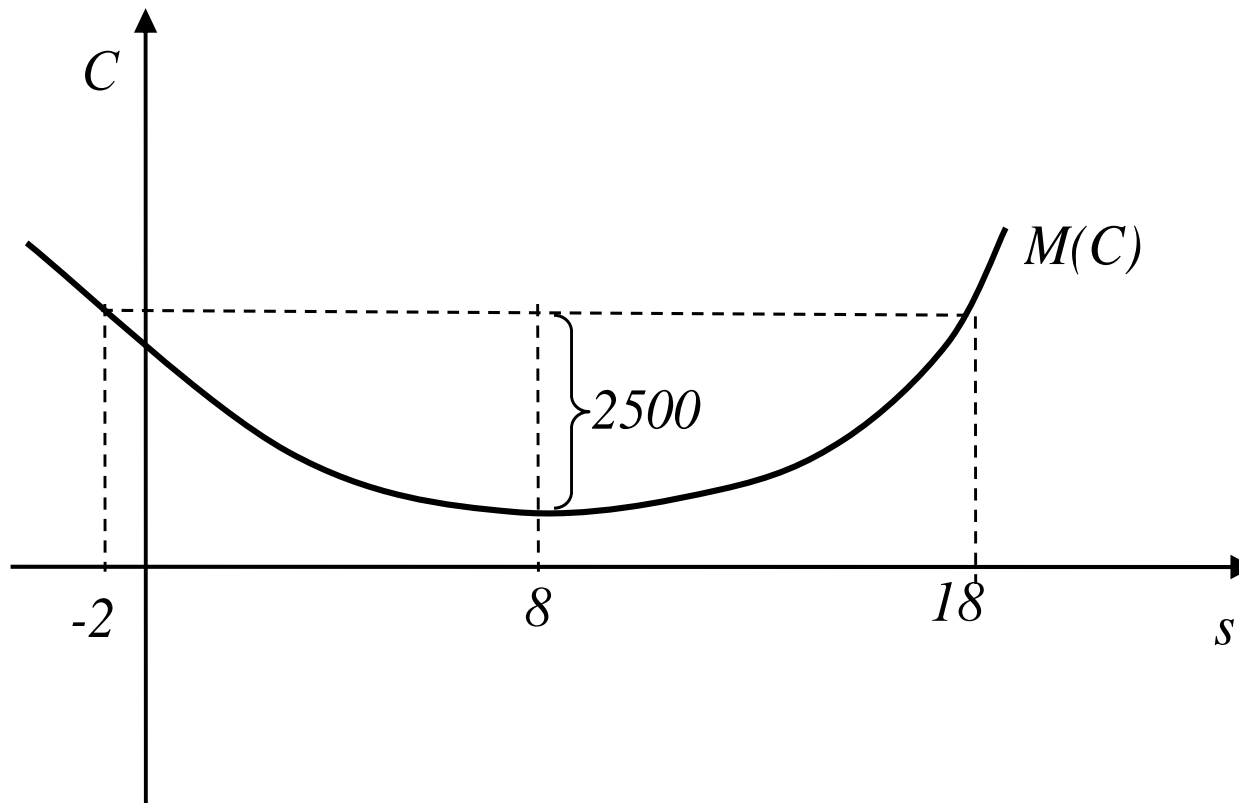
$$3150 - 50s_0 = 25s^2 - 400s + 2250 - 50s_0$$

$$25s^2 - 400s + 900 = 0$$

$$s^2 - 16s - 36 = 0$$

$$s_1 = -2 \quad s_2 = 18$$

Значение $s_1 = -2 < 0$ является недопустимым, поэтому оптимальной стратегией является отказ от размещения заказа. Такая ситуация возникает тогда, когда функция затрат является «плоской» или когда затраты на размещение заказа превышают другие затраты модели.



Задача 5 по теме «Одноэтапные стохастические модели управления запасами»